WISB108 Infi 2 tentamen
Dinsdag 1 februari 2022, 13:30 – 16:30

Aanwijzingen

- Geef altijd een duidelijke uitwerking met voldoende tekst-uitleg. Alleen een antwoord zonder motivatie is altijd fout, en alleen formules meestal ook.
- Werk rustig, netjes en duidelijk.
- Zorg dat je uitwerking maar één interpretatie toelaat.
- Je kunt alle (deel)vragen onafhankelijk van elkaar maken, ook als een eerdere (deel)vraag niet gelukt is.
- Alle informatie op dit opgavenblad mag bij alle (deel)opgaven gebruikt worden.
- **Je mag gebruik maken van het dictaat en van eigen aantekeningen. Andere hulpmiddelen zijn niet toegestaan.**
- Totaal 30 punten.

Normering

100% Uitwerking is correct, efficiënt en getuigt van een goed begrip van de theorie. Het is helder opgeschreven met voldoende toelichting. Een onbelangrijk rekenfoutje kan misschien door de vingers gezien worden.

75% Grote lijn begrepen, maar technische vaardigheid schiet tekort;
signaleert falende *sanity checks* maar is niet in staat de problemen op te lossen;
maakt meerdere fouten (al dan niet door slordigheid);
geeft wel enige uitleg maar niet voldoende;
gebruikt verwerpelijke notaties.

50% Weet ongeveer wat te doen maar lijdt aan gebrek aan vaardigheid en/of inzicht;
mist belangrijke gevalsonderscheidingen of uitzonderingen etc.;
herkent evident foute tussenresultaten niet;
toont onvoldoende vaardigheid/controle/zelfreflectie.
Een combinatie van meerdere bij 75% genoemde tekortkomingen kan ook leiden tot deze normering.

25% Aardig beginnetje maar het levert niet echt wat op, of: een combinatie van meerdere bij 50% genoemde tekortkomingen.

0% Geen idee wat te doen, of: geeft alleen formules zonder uitleg en de opgave vereiste meer dan alleen simpel rekenwerk.

Opmerking: indien *ernstige* fouten gemaakt worden op het gebied van vwo-voorkennis (kettingregel vergeten, slechte beheersing gonio, ...) kan de normering een punt lager uitvallen dan anders het geval zou zijn geweest.

1. We doorsnijden de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ met de cylinder $y^2 + (z+1)^2 = 4$. De doorsnijding is een kromme. Van deze kromme nemen we het deel met $x \geq 0$ en $y \geq 0$. Geef een parametrisering van dit deel van de kromme. 4 pt.

Uitwerking: Kan op verschillende manieren aangepakt worden. Wat voor de hand ligt, is de cylindervergelijking gebruiken om y uit te drukken als functie van z, en vervolgens de bolvergelijking om x uit te drukken als functie van y en z, en dus van z. De eerste stap geeft dat

$$y^2 = 4 - (z+1)^2,$$

en aangezien we alleen voor $y \geq 0$ hoeven te parametriseren, kiezen we

$$y = \sqrt{4 - (z+1)^2}.$$

Op dezelfde manier gebruiken we de bolvergelijking:

$$x^2 = 4 - y^2 - z^2 = (z+1)^2 - z^2 = 2z + 1;$$

ook hier geldt dat we alleen geinteresseerd zijn in het deel van de kromme met $x \geq 0$ zodat

$$x = \sqrt{2z+1}.$$

De parametrisering luidt dan

$$z \mapsto \left(\sqrt{2z+1},\, \sqrt{4-(z+1)^2},\, z\right)$$

waarbij $0 \leq 2z + 1$ (wegens de x-coordinaat) en $-2 \leq z + 1 \leq 2$ (wegens de y-coordinaat). Aan beide eisen wordt voldaan indien $-\frac{1}{2} \leq z \leq 1$.

Een andere oplossing:

$$[0, 2] \ni x \mapsto \left(x,\, \tfrac{1}{2}\sqrt{15 - 2x^2 - x^4},\, \tfrac{1}{2}(x^2 - 1)\right).$$

Interval moet vermeld worden (kost anders 1 punt). Ook moet je verantwoorden waarom je kiest voor de positieve wortels; doe je dat niet dan is dat in beginsel een "klein rekenfoutje" waarvan je er vooral niet teveel moet maken.

2. Een oppervlak is geparametriseerd door $\mathbf{\Psi}(u, v) = (u,\, 4u^2 + 3v,\, 3v^2)$. Bepaal de vergelijking van het raakvlak ($ax + by + cz = p$) aan het oppervlak in het punt met $u = 2$ en $v = -1$. 4 pt.

Uitwerking: We weten dat de vector $(a,\, b,\, c)^T$ een normaalvector is van het vlak $ax + by + cz = p$, en ook dat $\mathbf{\Psi}_u \times \mathbf{\Psi}_v$ een normaalvector is op het geparametriseerde oppervlak. We berekenen dus de partiele afgeleides $\mathbf{\Psi}_u = (1,\, 8u,\, 0)^T$ en $\mathbf{\Psi}_v = (0,\, 3,\, 6v)^T$. In het raakpunt met $u = 2$ en $v = -1$ is hun uitproduct

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -32 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

We kunnen de gemeenschappelijke factor 3 wegdelen en kiezen $a = -32$, $b = 2$, $c = 1$. Vervolgens bepalen we p door het raakpunt $\mathbf{\Psi}(2, -1) = (2, 13, 3)$ in te vullen in de vergelijking $ax + by + cz = p$. We vinden uiteindelijk

$$-32x + 2y + z = -35.$$

Ook goed met de factor 3 (of een andere) er nog in.

Eventueel zou je dit ook kunnen doen met de formule $z = f(\mathbf{a}) + Df(\mathbf{a})(\boldsymbol{x} - \mathbf{a})$ maar daarvoor moet je eerst uit de parametrisering afleiden dat $a = (2, 13)$ en $f(x, y) = \frac{1}{3}(y - 4x^2)^2$.

Ook kun je het vlak beschrijven als de verzameling vectoren $\boldsymbol{w}$ waarvoor geldt dat $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\Psi}(2, -1) + \lambda \boldsymbol{\Psi}_u(2, -1) + \mu \boldsymbol{\Psi}_v(2, -1)$ maar dan moet je dat nog wel omrekenen naar een vergelijking van de vorm $ax + by + cz = p$.

3. Zij $\mathcal{D}$ het gebied waarin geldt dat $x \geq 0$, $y \geq 0$, $0 \leq x - y \leq 3$, en $2 \leq xy \leq 3$. Bereken $\int_{\mathcal{D}} (x^2 - y^2)\, \mathrm{d}(x, y)$ met behulp van de coördinatentransformatie $u = xy$, $v = x - y$ (je hoeft niet te checken dat die bijectief is). 4 pt.

Uitwerking: Eerst maar eens naar de Jacobiaan kijken: we hebben hier een afbeelding

$$(x,\, y) \mapsto (xy,\, x - y)$$

met Jacobiaan

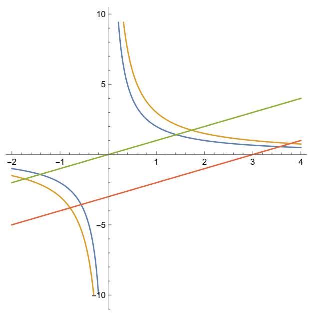
$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \det \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -(x + y).$$

Dus (zie dictaat p.166)

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \frac{1}{x + y}.$$

Dat is mooi, want $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ waarbij we alvast opmerken dat $x - y = v$ terwijl $x + y$ gaat wegvallen tegen de absolute waarde van de Jacobiaan. . . .

Dan over het gebied $\mathcal{D}$: de hyperbolen $xy = k$ in de x, y-ruimte komen overeen met de rechten $u = k$ in de u, v-ruimte, en de rechte lijnen $x - y = k$ met de rechte lijnen $v = k$. Op $\mathbb{R}^2$ is dit niet bijectief maar met de extra eisen $x \geq 0$, $y \geq 0$ erbij wel (zie figuur).



We kunnen daardoor $\mathcal{D}$ beschrijven in u, v-coordinaten met $2 \leq u \leq 3$ en $0 \leq v \leq 3$. Zodoende:

$$\int_{\mathcal{D}} x^2 - y^2\, \mathrm{d}(x, y) = \int_0^3 \int_2^3 v\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = 1 \cdot \int_0^3 v\, \mathrm{d}v = \frac{9}{2}.$$

Bijectiviteit hoefde niet gecheckt dus je mag "blind" de grenzen voor u en v gebruiken.

Wie de abs van de Jacobiaan vergeet krijgt een negatief antwoord, terwijl de integrand $z^2 \geq 0$ $\Longrightarrow$ alarmbellen of een punt eraf!

4. Gegeven:
$\boldsymbol{F}(x,\,y) = \left(6y + \frac{1}{y},\, x(7 - \frac{1}{y^2})\right)$,
$\varphi(x,\,y) = \frac{2}{3}x^3 + 6xy + \frac{x}{y}$, en
$h(x,\,y) = y - x^2$.
Verder is $\mathcal{C}$ het deel van een niveaukromme van h van $(0,\,2)$ naar $(1,\,3)$.

a. Bepaal een functie $g = g(x,\,y)$ zodanig dat $\boldsymbol{F} - \operatorname{grad}\varphi = g \operatorname{grad} h$. 2 pt.

Uitwerking: We zien $\operatorname{grad}\varphi = (2x^2 + 6y + \frac{1}{y},\, 6x - \frac{1}{y^2})$ en dus

$$\boldsymbol{F} - \operatorname{grad}\varphi = (-2x^2,\, x);$$

daarnaast $\operatorname{grad} h = (-2x,\, 1)$, dus we moeten nemen $g(x,\,y) = x$.

b. Bepaal $\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$. 4 pt.

Uitwerking: Uit a weten we dat $\boldsymbol{F} = \operatorname{grad}\varphi + x \operatorname{grad} h$. Dus

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_{\mathcal{C}} (\operatorname{grad}\varphi + x \operatorname{grad} h) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ &= \int_{\mathcal{C}} \operatorname{grad}\varphi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{\mathcal{C}} x \operatorname{grad} h \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.\end{aligned}$$

Hierin is volgens stelling 14.5

$$\int_{\mathcal{C}} \operatorname{grad}\varphi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \varphi(1,\,3) - \varphi(0,\,2) = 19,$$

terwijl volgens stelling 10.14 $\operatorname{grad} h$ loodrecht op de niveaukromme $\mathcal{C}$ staat, waardoor

$$\int_{\mathcal{C}} x \operatorname{grad} h \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0.$$

Dus $\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 19$.
Erg zonde van je tijd als je dit hardcore gaat uitrekenen ipv theorie te gebruiken! De opgave is zo geconstrueerd dat je in dat geval vastloopt in de integratie en maximaal 2 punten haalt.

5. Integreer z^2 over het boloppervlak $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. 4 pt.

Uitwerking: Gebruik bolcoordinaten met $r = 2$ in de vorm van de parametrisering

$$\boldsymbol{\Psi}(\theta,\,\varphi) = 2(\cos\theta\sin\varphi,\, \sin\theta\sin\varphi,\, \cos\varphi).$$

De partiële afgeleiden zijn

$$\boldsymbol{\Psi}_\theta = 2(-\sin\theta\sin\varphi,\, \cos\theta\sin\varphi,\, 0)$$

en

$$\boldsymbol{\Psi}_\varphi = 2(\cos\theta\cos\varphi,\, \sin\theta\cos\varphi,\, \sin\varphi).$$

Hun uitproduct is

$$\boldsymbol{\Psi}_\theta \times \boldsymbol{\Psi}_\varphi = -4(\cos\theta\sin^2\varphi,\, \sin\theta\sin^2\varphi,\, \sin\varphi\cos\varphi),$$

met norm

$$|\mathbf{\Psi}_\theta \times \mathbf{\Psi}_\varphi| = 4\sqrt{\sin^4\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\varphi} = 4\sin\varphi\sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi} = 4\sin\varphi.$$

(Opmerking: $|\sin\varphi|$ is niet nodig want voor $0 \le \varphi \le \pi$ geldt $\sin\varphi \ge 0$.)

Verder hebben we $z^2 = r^2\cos^2\varphi = 4\cos^2\varphi$.

Zij nu $\mathcal{S}$ het boloppervlak en $\mathcal{D} = \{(\theta, \varphi) \mid 0 \le \theta \le 2\pi,\, 0 \le \varphi \le \pi\}$, dan krijgen we de integraal:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}} z^2\,\mathrm{d}S &= \int_{\mathcal{D}} 4\cos^2\varphi\,|\mathbf{\Psi}_\theta \times \mathbf{\Psi}_\varphi|\;\mathrm{d}(\theta,\varphi)\\ &= 16\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \cos^2\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\\ &= -\frac{32\pi}{3}\cos^3\varphi\Big|_0^{\pi} = \frac{64\pi}{3}.\end{aligned}$$

“Toevallig” (??) is hier de Jacobiaan gelijk aan $|\mathbf{\Psi}_u \times \mathbf{\Psi}_v|$. Wie hier klakkeloos de Jacobiaan gebruikt krijgt wel het goede antwoord, maar op een onverantwoorde manier: je zit immers in een scenario waar je $\mathrm{d}S$ nodig hebt.

Ook waren er studenten die een volume-integraal uitrekenden ipv een integraal over een oppervlakte. Als je dat doet dan heb je niet laten zien dat je de leerdoelen van hst. 15 begrepen hebt, en daarom krijg je er geen punten voor.

6. Laat f en g scalaire functies op $\mathbb{R}^3$ zijn.

   a. Bewijs dat $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$. 4 pt.

   Uitwerking: Dit is een kwestie van uitschrijven in coordinaten mbv $\nabla = (\partial_x,\, \partial_y,\, \partial_z)$. Volgens de productregel voor differentieren hebben we

   $$\partial_x(fg) = (\partial_x f)g + f(\partial_x g).$$

   Differentieren naar y en z geeft precies dezelfde uitdrukkingen met indices y en z ipv x. Door de drie coordinaten in de uitdrukkingen samen te voegen tot een vector, volgt $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g)$, wat te bewijzen was.

   b. Vind en bewijs een soortgelijke uitdrukking voor $\nabla \cdot \nabla(fg)$. 4 pt.

Uitwerking: Vooraf: zie oefening 1315 in het dictaat; voor een scalair veld φ geldt

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = \partial^2_{xx}\varphi + \partial^2_{yy}\varphi + \partial^2_{zz}\varphi.$$

Dit zullen we aan het eind gebruiken.

Gezien de a-opgave zoeken we een uitdrukking voor

$$\nabla \cdot \nabla(fg) = \nabla \cdot (g\nabla f + f\nabla g).$$

We pakken dit weer coordinaatsgewijs aan door ∂_x te laten werken op de eerste coordinaat van $g\nabla f + f\nabla g$: die is dus $g\partial_x f + f\partial_x g$. Dit geeft:

$$\partial_x(g\partial_x f + f\partial_x g) = g\partial^2_{xx} f + 2\partial_x f\partial_x g + f\partial^2_{xx} g.$$

En op dezelfde manier ook:

$$\partial_y(g\partial_y f + f\partial_y g) = g\partial^2_{yy} f + 2\partial_y f\partial_y g + f\partial^2_{yy} g$$

en

$$\partial_z(g\partial_z f + f\partial_z g) = g\partial^2_{zz} f + 2\partial_z f\partial_z g + f\partial^2_{zz} g.$$

De som van deze drie uitdrukkingen is het inproduct dat we zoeken:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\nabla(fg) &= g(\partial^2_{xx} f + \partial^2_{yy} f + \partial^2_{zz} f) + 2(\partial_x f\partial_x g + \partial_y f\partial_y g + \partial_z f\partial_z g) + f(\partial^2_{xx} g + \partial^2_{yy} g + \partial^2_{zz} g)\\ &= g(\nabla\cdot\nabla f) + 2(\nabla f\cdot\nabla g) + f(\nabla\cdot\nabla g).\end{aligned}$$