WISB108 Infi 2 hertentamen
Uitwerkingen

1. Zij $w(u,v) = f(u) + g(v)$ waarin f en g gladde (dwz voldoende vaak differentieerbare) functies $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u = ax - bt$ en $v = ax + bt$. Laat zien dat 4 pt.

$$a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Uitwerking: Kettingregel toepassen geeft

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}v}\frac{\partial v}{\partial t} = -b\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} + b\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}v};$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial t} = b^2\left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}u^2} + \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}v^2}\right),$$

en op dezelfde manier

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = a^2\left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}u^2} + \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}v^2}\right).$$

Hieraan zien we dat inderdaad

$$a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = a^2 b^2 \left(f''(u) + g''(v)\right).$$

2. Bepaal de richtingsafgeleide van $f(x, y) = \sqrt{x^2 y^3}$ in het punt $(-2, 2)$ evenwijdig aan de richting $\boldsymbol{u} = (3, -4)$. 4 pt.

Uitwerking: We gebruiken stelling 10.16 uit het dictaat:

$$D_{\hat{\boldsymbol{u}}} f(-2,2) = \nabla f(-2,2) \cdot \hat{\boldsymbol{u}},$$

waarin $\hat{\boldsymbol{u}} = \frac{1}{\|\boldsymbol{u}\|}\boldsymbol{u} = \frac{1}{5}(3, -4)$ en

$$\nabla f(-2,2) = \frac{1}{2f(x,y)}(2xy^2, 3x^2y^2)\Big|_{(x=-2,y=2)} = (-2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}).$$

De richtingsafgeleide is dus

$$\tfrac{1}{5}(-2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}) \cdot (3, -4) = \frac{18}{5}\sqrt{2}.$$

Merk op dat $\sqrt{x^2y^3} \neq xy^{3/2}$*!*

3. Bereken $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{-r^3}\,\mathrm{d}V$ waarin $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 4 pt.

Uitwerking: In bolcoordinaten:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{-r^3}\,\mathrm{d}V &= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \mathrm{e}^{-r^3} \sin\varphi \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\ &= 2\pi \int_0^\pi \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \int_0^\infty r^2\mathrm{e}^{-r^3}\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{4\pi}{3}.\end{aligned}$$

4. Zij $\boldsymbol{F} = (xz^3,\, -2x^2yz,\, 2yz^4)$.

   a. Bepaal de rotatie van $\boldsymbol{F}$, of leg uit waarom dat niet kan. 3 pt.

   Uitwerking: Bij een glad vectorveld op $\mathbb{R}^3$ is de rotatie gewoon uit te rekenen:

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 2x^2y + 2z^4 \\ 3xz^2 \\ -4xyz \end{pmatrix}.$$

   b. Bepaal een potentiaal van $\boldsymbol{F}$, of leg uit waarom dat niet kan. 3 pt.

   Uitwerking: Een potentiaal van $\boldsymbol{F}$ is een scalaire functie f waarvoor geldt dat $\nabla f = \boldsymbol{F}$. Uit stelling 13.6 weten we dat *als* f bestaat, *dan* moet gelden dat $\nabla \times \nabla f = \nabla \times \boldsymbol{F} = \mathbf{0}$. Maar uit de a-opgave weten we dat $\nabla \times \boldsymbol{F} \neq \mathbf{0}$, dus de potentiaal f bestaat niet.

   Aan stelling 14.8 heb je in dit geval niets. Proberen de potentiaal uit te rekenen en constateren dat het niet lukt is bij de meesten een te zwak verhaal.

5. Bereken $\int_{\mathcal{C}} (x^2+y^2)\mathrm{d}s$ waarin $\mathcal{C}$ is gegeven door $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ met $0 \le t \le 2\pi$. 4 pt.

Uitwerking: Vanwege symmetrie van $\mathcal{C}$ en de integrand, nemen we de integraal over $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, waardoor we precies $\frac{1}{4}$ van het antwoord krijgen.

Op dit interval hebben we de parametrisatie $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t,\, \sin t)$ met afgeleide

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (-3\cos^2 t \sin t,\, 3\sin^2 t\cos t)$$

en norm

$$\left\|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right\| = 3\cos t\sin t.$$

(Merk op: op interval $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ zijn cos en sin niet-negatief; als je de integraal over de hele kromme neemt heb je absolute waarde nodig.)

Dan

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s &= 4\int_0^{\pi/2} (\cos^6 t + \sin^6 t) \left\|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right\| \,\mathrm{d}t \\ &= 12\int_0^{\pi/2} (\cos^7 t\sin t + \sin^7 t\cos t)\,\mathrm{d}t \\ &= \tfrac{12}{8}(-\cos^8 t + \sin^8 t)\big|_0^{\pi/2} = 3.\end{aligned}$$

Als je 0 als antwoord vindt dan hoor je je toch hard achter de oren te krabben hoe dat nou toch kan met deze integraal …

6. Bereken de flux van het vectorveld $\boldsymbol{F} = 4xz\hat{\mathbf{\imath}} + 3z^2\hat{\mathbf{k}}$ door het oppervlak gegeven door $z^2 = x^2 + y^2$ tussen $z = 0$ en $z = 4$. 4 pt.

Uitwerking: Noem het oppervlak $\mathcal{S}$ en merk op dat gegeven is dat $z \geq 0$ op $\mathcal{S}$. Hierdoor kunnen we $\mathcal{S}$ beschrijven met de vergelijking $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Hiermee vinden we:

$$\boldsymbol{n} = (-\frac{x}{z}, -\frac{y}{z}, 1) \text{ (zie par. 10.7 en oef. 1514; en)}$$
$$\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S = \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}(x,y) \text{ (oef. 1508 en/of meetkundig inzicht).}$$

De flux is dus

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \int_{\mathcal{S}} (3z^2 - 4x^2)\,\mathrm{d}(x,y).$$

Stappen we over op cylindercoordinaten (Jacobiaan r, $\mathcal{S}$ beschreven door $z^2 = r^2$ met $0 \leq r \leq 4$) dan krijgen we

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S &= \int_0^4 \int_0^{2\pi} (3r^2 - 4r^2\cos^2\theta) r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^4 \int_0^{2\pi} r^3(3 - 4\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \\
&= \tfrac{1}{4}r^4\Big|_0^4 \left(6\pi - 4\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\right) \\
&= 64(6\pi - 4\pi) = 128\pi.
\end{aligned}$$

7. ✱ Het punt $P = (1,\ -1,\ 2)$ ligt op beide oppervlakken $\mathcal{G}$ en $\mathcal{H}$, waarbij $\mathcal{G}$ gegeven wordt door $x^2 + y^2 - z = 0$, en $\mathcal{H}$ door $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 9$. 4 pt.

Geef een vergelijking van het vlak door P dat loodrecht op de doorsnijding van $\mathcal{G}$ en $\mathcal{H}$ staat.

Uitwerking: Merk op dat we in dit geval de oppervlakken $\mathcal{G}$ en $\mathcal{H}$ beide kunnen opvatten als niveauverzamelingen. Daartoe definieren we twee functies $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, namelijk $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$ en $h(x,y,z) = (2x^2 + 3y^2 + z^2)$, zodat $\mathcal{G}$ de niveauverzameling $g(x,y,z) = 0$ is en $\mathcal{H}$ de niveauverzameling $h(x,y,z) = 9$.

We weten dat $\operatorname{grad} g$ en $\operatorname{grad} h$ orthogonaal zijn met de oppervlakken $\mathcal{G}$ resp. $\mathcal{H}$. De gradientvectoren in het het gegeven punt P liggen dus in het gevraagde vlak. Voor deze vectoren vinden we:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{grad} g(P) = (2,\ -2,\ -1), \\
&\operatorname{grad} h(P) = (4,\ -6,\ 4),
\end{aligned}$$

en hun uitproduct

$$\boldsymbol{n} = \operatorname{grad} h(P) \times \operatorname{grad} g(P) = (4,\ 3,\ 2).$$

Vector $\boldsymbol{n}$ is orthogonaal met beide gradientvectoren en is dus normaalvector van het gevraagde vlak. Met $P = (1, -1, 2)$ als steunpunt is dus de vergelijking van het vlak

$$4(x-1) + 3(y+1) + 2(z-2) = 0,$$

wat we desgewenst ook kunnen schrijven als

$$4x + 3y + 2z = 5.$$