Tentamen Lineaire algebra 1 (WISB107)
Dinsdag 3 november 2020 13.30-16.30

Docent: *Barbara van den Berg*

- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.
- Het gebruik van het dictaat en collegeaantekeningen is toegestaan. Het interactieve dictaat op Blackboard mag gelezen worden, maar mag niet gebruikt worden voor communicatie tijdens het tentamen. Het gebruik van telefoons, computers, rekenmachines of andere bronnen is **NIET** toegestaan.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt en bewijs je beweringen.
- Je kunt de opgaven in willekeurige volgorde maken. Ook als je antwoord niet volledig is, kun je er punten voor krijgen. Als je een onderdeel van een opgave niet kunt bewijzen, mag je dat resultaat in het vervolg wel gebruiken.
- Tijdens het tentamen is de docent beschikbaar voor dringende vragen op Teams of per mail: b.n.vandenberg@uu.nl. Indien niet beschikbaar, neem dan contact op met Leandro Chiarini Medeiros: l.chiarinimedeiros@uu.nl
- Het tentamen heeft vijf opgaven. De verdeling van de punten is als volgt:
  - opgave 1: 20 punten
  - opgave 2: 15 punten
  - opgave 3: 30 punten
  - opgave 4: 15 punten
  - opgave 5: 20 punten

Verklaring bij je uitwerking

Je tentamen is pas geldig als je bij je uitwerking naar waarheid verklaart dat je geen andere hulpbronnen hebt gebruikt dan die zijn toegestaan. Je kunt hiervoor de volgende verklaring gebruiken:

Hierbij verklaar ik dat ik de uitwerking van dit tentamen zelf heb gemaakt zonder hulp van andere personen of van hulpmiddelen anders dan het dictaat, overig cursusmateriaal op de Blackboardpagina van Lineaire Algebra en eigen aantekeningen.

3 november, ... [naam] ... [handtekening].

Opgave 1

(*20 punten*) In $\mathbb{R}^3$ is de lijn l gegeven door $l = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en de lijn m is gegeven als de snijlijn van de twee vlakken gegeven door $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$ en $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

(a). (*6 punten*) Bewijs dat de twee lijnen l en m elkaar niet snijden.

(b). (*7 punten*) Geef een parametrisatie van de lijn m.

(c). (*7 punten*) Bereken de afstand tussen l en m.

Opgave 2

(*15 punten*) Laat S en T twee eindige deelverzamelingen zijn van $\mathbb{R}^n$, met de eigenschap dat de doorsnede van S en T niet leeg is.

(a). (*5 punten*) Bewijs dat $\text{Span}(S \cap T) \subseteq \text{Span}(S) \cap \text{Span}(T)$.

(b). (*5 punten*) Geef een voorbeeld waarbij $\text{Span}(S \cap T)$ en $\text{Span}(S) \cap \text{Span}(T)$ gelijk zijn. NB: Vergeet niet om aan te tonen waarom je voorbeeld voldoet.

(c). (*5 punten*) Geef een voorbeeld waarbij $\text{Span}(S \cap T)$ en $\text{Span}(S) \cap \text{Span}(T)$ ongelijk zijn. NB: Vergeet niet om aan te tonen waarom je voorbeeld voldoet.

Opgave 3

(*30 punten*)

Laat $a \in \mathbb{R}$ gegeven zijn. Bekijk de vier vectoren in $\mathbb{R}^4$ gegeven door:

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ a+3 \\ a \end{pmatrix}, \mathbf{v_4} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \\ a(a-1) \end{pmatrix}.$$

(a). (*12 punten*) Bepaal voor welke waarde(n) van a de vier vectoren een basis vormen voor $\mathbb{R}^4$.

(b). (*5 punten*) Laat A de matrix zijn met $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}$ in de kolommen. Wat is de rang van A als $a = 0$?

(c). (*8 punten*) Wat is de dimensie van de nulruimte van A als $a = 1$? Geef een basis voor de nulruimte als $a = 1$.

(d). (*5 punten*) Voor welke waarden van a is A inverteerbaar?

Opgave 4

(*15 punten*) Laat $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Bewijs door handig toepassen van rij- en kolomoperaties dat

$$\begin{vmatrix} a & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a \\ 2a & a+b & a+b & a+b \\ 2a & a+b & a+b+c & a+b+c \\ 2a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \end{vmatrix} = abcd.$$

Opgave 5

(*20 punten*) Laat A en B $m \times n$-matrices zijn. In onderdeel (d) van deze opgave gaan we bewijzen dat

$$\text{rang}(A + B) \leq \text{rang}(A) + \text{rang}(B).$$

(a). (*5 punten*) Geef een voorbeeld van twee 2×2 matrices A en B die ongelijk zijn aan de nulmatrix en zodat

$$\text{rang}(A + B) = \text{rang}(A) + \text{rang}(B).$$

NB: Vergeet niet om aan te tonen waarom je voorbeeld voldoet.

(b). (*5 punten*) Stel dat A en B twee inverteerbare $n \times n$ matrices zijn. Waarom geldt dan

$$\text{rang}(A + B) < \text{rang}(A) + \text{rang}(B)?$$

Neem nu aan dat A en B $m \times n$-matrices zijn.

(c). (*5 punten*) Noem $U = \text{Span(kolommen van A)}$ en $V = \text{Span(kolommen van B)}$. Bewijs dat

$$\text{Span(kolommen van A+B)} \subseteq U + V$$

.

(d). (*5 punten*) Bewijs dat

$$\text{rang}(A + B) \leq \text{rang}(A) + \text{rang}(B).$$