WISB107 Infi 1 deeltoets 2 ma 2 nov 2020, 13:30 – 15:30

Aanwijzingen

- Geef altijd een duidelijke uitwerking met voldoende tekst-uitleg. Alleen een antwoord zonder motivatie is altijd fout, en alleen formules meestal ook.
- Werk rustig, netjes en duidelijk.
- Zorg dat je uitwerking maar één interpretatie toelaat.
- Je kunt alle (deel)vragen onafhankelijk van elkaar maken, ook als een eerdere (deel)vraag niet gelukt is.
- Alle informatie op dit opgavenblad mag bij alle (deel)opgaven gebruikt worden.
- Je mag gebruik maken van het dictaat, overig cursusmateriaal in de Infi-map van de cursus op Teams, en eigen aantekeningen. Gebruik van andere hulpbronnen is niet toegestaan. Je moet een verklaring ondertekenen dat je je hieraan houdt.
- Let extra goed op leesbaarheid (ivm scannen).
- **Inleveren:** op Blackboard bij Assessments. Lever precies één pdf-bestand in. Gebruik de bestandsnaam INFI_deeltoets2_Achternaam_studentnummer.pdf.
- Bij vragen, twijfel over de regels, of logistieke problemen kun je per Teams of email contact opnemen met Steven (@Steven of s.a.wepster@gmail.com) of met Jetze (@Jetze of j.zoethout@uu.nl).
- Notatie: met log wordt de natuurlijke logaritme met grondtal e bedoeld.
- Totaal 20 punten.

Normering

100% Uitwerking is correct, efficiënt en getuigt van een goed begrip van de theorie. Het is helder opgeschreven met voldoende toelichting. Een onbelangrijk rekenfoutje kan misschien door de vingers gezien worden.

75% Grote lijn begrepen, maar technische vaardigheid schiet tekort;
signaleert falende *sanity checks* maar is niet in staat de problemen op te lossen;
maakt meerdere fouten (al dan niet door slordigheid);
geeft wel enige uitleg maar niet voldoende;
gebruikt verwerpelijke notaties.

50% Weet ongeveer wat te doen maar lijdt aan gebrek aan vaardigheid en/of inzicht;
mist belangrijke gevalsonderscheidingen of uitzonderingen etc.;
herkent evident foute tussenresultaten niet;
toont onvoldoende vaardigheid/controle/zelfreflectie.
Een combinatie van meerdere bij 75% genoemde tekortkomingen kan ook leiden tot deze normering.

25% Aardig beginnetje maar het levert niet echt wat op, of: een combinatie van meerdere bij 50% genoemde tekortkomingen.

0% Geen idee wat te doen, of: geeft alleen formules zonder uitleg en de opgave vereiste meer dan alleen simpel rekenwerk.

Opmerking: indien *ernstige* fouten gemaakt worden op het gebied van vwo-voorkennis (kettingregel vergeten, slechte beheersing gonio, . . .) kan de normering een punt lager uitvallen dan anders het geval zou zijn geweest.

Print en onderteken deze verklaring, of schrijf de verklaring over en onderteken.

Verklaring
Hierbij verklaar ik dat ik de uitwerkingen bij dit tentamen zelf heb gemaakt zonder hulp van andere personen of van hulpmiddelen anders dan het dictaat, overig cursusmateriaal in de Infi-map van de cursus op Teams, en eigen aantekeningen.

2 november 2020, naam en handtekening:

---

1. Bepaal een benadering van $\sqrt{98}$ met een derde-orde Taylorbenadering van $\sqrt{x}$ in steunpunt 100. Geef je eindantwoord als een som of verschil van breuken. 4 pt.

Uitwerking: We definiëren $f(x) = \sqrt{x}$. De derde orde Taylorbenadering met steunpunt 100 luidt

$$P_3(x) = f(100) + f'(100)(x-100) + \tfrac{1}{2}f''(100)(x-100)^2 + \tfrac{1}{2\cdot 3}f'''(100)(x-100)^3.$$

De afgeleiden vinden we door de volgende tabel op te stellen:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(100)$
0	$x^{1/2}$	10
1	$\frac{1}{2}x^{-1/2}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{20}$
2	$-\frac{1}{4}x^{-3/2}$	$-\frac{1}{4\cdot 100\cdot 10} = -\frac{1}{4\,000}$
3	$+\frac{3}{8}x^{-5/2}$	$\frac{3}{800\,000}$

Dus we vinden

$$\begin{aligned} P_3(x) &= 10 + \tfrac{1}{20}(x-100) - \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{4\,000}(x-100)^2 + \tfrac{1}{2\cdot 3}\tfrac{3}{800\,000}(x-100)^3 \\ &= 10 + \frac{x-100}{20} - \frac{(x-100)^2}{8000} + \frac{(x-100)^3}{1600\,000}. \end{aligned}$$

We gebruiken nu $P_3(98)$ als benadering van $\sqrt{98}$:

$$P_3(98) = 10 - \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{2000} - \tfrac{1}{200000}.$$

2. Bereken $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$, of laat zien dat deze integraal divergent is. 4 pt.

Uitwerking: We plegen substitutie $\mathrm{e}^x = u$ en daarbij horend $\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$. Wanneer we bovendien "creatief nietsdoen" door teller en noemer met e^x te vermenigvuldigen, krijgen we

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{2}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = 2\arctan u.\end{aligned}$$

Er zijn nu twee manieren om verder te gaan: direct terugsubstitueren, of u handhaven en de integratiegrenzen vertalen naar u.

Wie terugsubstitueert krijgt:

$$2\arctan u = 2\arctan \mathrm{e}^x$$

en dus

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{2}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x &= 2\arctan \mathrm{e}^x\Big|_0^\infty \\ &= 2(\lim_{x\to\infty} \arctan \mathrm{e}^x - \arctan \mathrm{e}^0) \\ &= 2(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Wie daarentegen de grenzen aanpast vindt

$$2\arctan u\Big|_1^\infty = 2(\lim_{u\to\infty} \arctan u - \tfrac{\pi}{4}) = 2(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}.$$

3. Evalueer $\displaystyle\int \log(x^2-1)\,\mathrm{d}x$. 4 pt.

Uitwerking: Partieel is hier de aangewezen weg, maar dat kan op verschillende manieren.

Ten eerste:

$$\int \log(x^2-1)\,\mathrm{d}x = x\log(x^2-1) - \int \frac{2x^2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x.$$

De nieuwe integrand herschrijven we als

$$\frac{2x^2}{x^2-1} = 2 + \frac{2}{x^2-1} = 2 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}.$$

De afzonderlijke termen hebben primitieven $2x$, $\log|x-1|$ en $\log|x+1|$. Dus

$$\int \log(x^2-1)\,\mathrm{d}x = x\log(x^2-1) - 2x + \log|x-1| - \log|x+1|\,.$$

Dit kan nog op verschillende manieren herschreven worden o.a. door gebruik van logaritmeregels, zoals

$$(x+1)\log|x-1| + (x-1)\log|x+1| - 2x$$

of

$$x\log(x^2-1) - 2x + \log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|.$$

Dat mag allemaal maar hoeft niet.

Tweede oplossing: We schrijven eerst $\log(x^2-1) = \log|x-1| + \log|x+1|$. (Detail: de opgave is alleen zinvol als $x^2-1>0$, wat waar is als $x-1$ en $x+1$ hetzelfde teken hebben, maar dat kan voor beide dus ook best negatief zijn.) Door partieel integreren weten we dat

$$\int \log|u|\,\mathrm{d}u = u\log|u| - \int \mathrm{d}u = u\log|u| - u.$$

Dit passen we tweemaal toe: eerst met $u=x-1$ en vervolgens met $u=x+1$. Combinatie leidt tot hetzelfde antwoord als boven.

4. Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem $y'(t) + y(t)\sin t = \sin t$ met beginwaarde $y(0)=2$. 4 pt.

Uitwerking: Eerst de homogene vergelijking $y' + y\sin t = 0$ oplossen door scheiden:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \sin t\,\mathrm{d}t.$$

Integreren:

$$\log |y| = \cos t + c,$$

en dus

$$y = c\mathrm{e}^{\cos t}. \tag{1}$$

Ik werk hier met "generieke" integratie-constanten; $y = 0$ is een oplossing van de homogene vergelijking, en als $y < 0$ dan zal in vergelijking (1) ook $c < 0$ zijn. Kortom voor alle $c \in \mathbb{R}$ representeert (1) een oplossing van de homogene d.v. (Dit hoeft niet netjes uitgewerkt en verantwoord te zijn.)

Een particuliere oplossing vind je met een klein beetje creativiteit: de constante functie $y = 1$ voldoet! Maar als je dat niet ziet dan kun je variatie van constante toepassen door de integratieconstante c op te vatten als een functie $c(t)$ van t. Differentieren van (1) geeft dat

$$y' = (c' - c \sin t)\mathrm{e}^{\cos t}.$$

Wanneer we dit invullen in de *in*homogene d.v. dan vinden we de eis aan c:

$$c' = \sin t\, \mathrm{e}^{-\cos t},$$

waaruit we concluderen dat

$$c(t) = \mathrm{e}^{-\cos t} + C.$$

Hieruit volgt dat de algemene oplossing van het inhomogene probleem is:

$$y = 1 + C\mathrm{e}^{\cos t}.$$

Tot slot vullen we de beginwaarde in: $y = 2$ als $t = 0$, dit geeft de eis dat $2 = 1 + C\mathrm{e}^1$ ofwel $C = \mathrm{e}^{-1}$, zodat de oplossing van het beginwaardeprobleem luidt:

$$y = 1 + \tfrac{1}{\mathrm{e}}\mathrm{e}^{\cos t} \text{ of } y = 1 + \mathrm{e}^{\cos t - 1}.$$

5. a. Bepaal $\lim_{x\to\pi/4} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\log\tan x)$. 2 pt.

Uitwerking: Dit lijkt misschien lastig maar je hoeft niet veel meer te doen dan interpreteren. In de opgave staat de limiet van een afgeleide, dus laten we eerst de afgeleide bepalen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\log\tan x) = \frac{1}{\tan x\cos^2 x} = \frac{1+\tan^2 x}{\tan x}.$$

We hebben daar twee verschillende vormen voor $\tan' x$ gebruikt die leiden tot verschillende manieren om verder te gaan.

De eerste vorm vereenvoudigt als

$$\frac{1}{\tan x\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x\cos x} = \frac{1}{\sin 2x}.$$

De andere vorm kun je ook gebruiken, die vereenvoudigt als

$$\frac{1+\tan^2 x}{\tan x} = \frac{1}{\tan x} + \tan x.$$

Al deze vereenvoudigingen natuurlijk onder voorbehoud dat er geen noemers nul worden, maar dat zit wel goed in de buurt van $x = \pi/4$. We kunnen de limiet gewoon uitrekenen door invullen en vinden in alle gevallen 2.

b. Bepaal $\lim_{x\to\pi/4} (\tan x)^{\tan(2x)}$. 2 pt.

Uitwerking: Hier hebben we een limiet van de gedaante "1^∞" waar in de cursus geen aandacht aan is besteed dus hier komt het aan op het inzetten van je eigen inzicht en creativiteit, waarbij de a-opgave je hopelijk op het juiste spoor zet.

Laten we definieren $f(x) = (\tan x)^{\tan 2x}$. We nemen logaritme en vinden

$$\log f(x) = \tan(2x)\log(\tan x) = \sin(2x)\frac{\log(\tan x)}{\cos(2x)}.$$

We kunnen de volgende limieten bepalen: eerst

$$\lim_{x\to\pi/4} \sin(2x) = \sin(\pi/2) = 1;$$

vervolgens kijken we naar

$$\lim_{x\to\pi/4} \frac{\log(\tan x)}{\cos(2x)}.$$

Hierin gaan zowel teller als noemer naar 0 dus we kunnen proberen l'Hopital toe te passen. Dan vinden we wegens de a-opgave:

$$\lim_{x\to\pi/4} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log(\tan x) = 2,$$

en verder

$$\lim_{x\to\pi/4} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos 2x = \lim_{x\to\pi/4} -\sin 2x = -2.$$

Hieruit volgt

$$\lim_{x\to\pi/4} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log\tan x}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos 2x} = -1$$

en volgens l'Hopital en de productregel voor limieten dus ook

$$\lim_{x\to\pi/4} \log f(x) = \lim_{x\to\pi/4} \sin 2x \frac{\log\tan x}{\cos 2x} = 1\cdot -1 = -1.$$

We concluderen dat

$$\lim_{x\to\pi/4} f(x) = \mathrm{e}^{-1}.$$

Er zijn ook andere wegen mogelijk om hierop uit te komen, zoals via de tangens-verdubbelingsformule, of Tayloren op orde 2 mbv logaritmisch differentieren.