WISB107 Infi 1 deeltoets 1 do 24 sep 2020, 09:00 – 10:30

1. Zij $f(x) = \log(1 + x^2)$ en $g = f \circ f$. Ter herinnering: log is hier de natuurlijke logaritme. Laat met de rekenregels voor differentiëren zien dat **4 pt.**

$$g'(2) = \frac{8 \log 5}{5 + 5(\log 5)^2}.$$

Uitwerking:

Eerste manier We gebruiken dat $g(x) = f(f(x))$ en differentiëren met de kettingregel:

$$g'(2) = f'(f(2))f'(2).$$

Er geldt $f(2) = \log 5$, en de afgeleide van f is $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$. Invullen geeft

$$g'(2) = f'(\log 5)f'(2) = \frac{2 \log 5}{1 + (\log 5)^2} \cdot \frac{2 \cdot 2}{1 + 2^2} = \frac{8 \log 5}{5 + 5(\log 5)^2}.$$

Tweede manier We kunnen ook eerst

$$g(x) = f(f(x)) = \log\big(1 + (\log(1 + x^2))^2\big)$$

schrijven en deze functie rechtstreeks differentiëren:

$$g'(x) = \frac{1}{1 + (\log(1 + x^2))^2} \cdot 2 \log(1+x^2) \cdot \frac{1}{1 + x^2} \cdot 2x = \frac{4x \log(1 + x^2)}{(1 + x^2)(1 + \log(1 + x^2)^2)}.$$

Als we nu $x = 2$ nemen dan vinden we hetzelfde antwoord als boven. Maar ik vind dit onoverzichtelijker.

2. a. Gebruik de relatie **4 pt.**

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

om te laten zien dat

$$\cos^2 \tfrac{u}{2} = \tfrac{1}{2}(1 + \cos u).$$

Uitwerking: Als we in de gegeven formule $\alpha = \beta = \frac{u}{2}$ kiezen dan vinden we

$$\cos u = \cos^2 \frac{u}{2} - \sin^2 \frac{u}{2} = 2\cos^2 \frac{u}{2} - 1,$$

immers $\sin^2 \frac{u}{2} = 1 - \cos^2 \frac{u}{2}$. Nu hoeven we alleen nog maar te herschikken:

$$\cos^2 \frac{u}{2} = \frac{1}{2}(\cos u + 1),$$

zoals beweerd in de opgave.

b. Voor welke $u \in [-2\pi, 2\pi]$ geldt dat $\cos \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos u}{2}}$? 4 pt.

Uitwerking: Als we worteltrekken aan beide kanten van het resultaat van de a-opgave dan is de rechterkant in orde, maar aan de linkerkant krijgen we $\left|\cos \frac{u}{2}\right|$. We moeten dus eisen dat $\cos \frac{u}{2} \geq 0$. Hieraan is voldaan als $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{u}{2} \leq \frac{\pi}{2}$, oftewel $-\pi \leq u \leq \pi$.

3. Ter herinnering: de functie sgn staat op p. 17 in het dictaat. 4 pt.
Zij $a > 0$, $G(x) = \operatorname{sgn}(x)\cos(x)$ en

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } 0 < x < a, \\ 1 & \text{als } x \leq 0 \text{ of } x \geq a. \end{cases}$$

Bepaal $\displaystyle\int_{-a}^{a} \big(G(x) + H(x)\big)\,\mathrm{d}x$ door Stelling 2.12 toe te passen.

Uitwerking: Door lineariteit 2.12f toe te passen splitsen we de integraal:

$$\int_{-a}^{a} \big(G(x) + H(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} G(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-a}^{a} H(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nu merken we op dat

$$G(-x) = \operatorname{sgn}(-x)\cos(-x) = -\operatorname{sgn}(x)\cos(x) = -G(x),$$

oftewel G is een oneven functie, dus volgens 2.12g is de integraal met G gelijk aan nul.

De integraal met H knippen we op met 2.12d:

$$\int_{-a}^{a} H(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} H(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} H(x)\,\mathrm{d}x.$$

Hierin is volgens 2.12a

$$\int_{-a}^{0} H(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} 1\,\mathrm{d}x = a,$$

d.w.z. de oppervlakte van een rechthoek met breedte a en hoogte 1, en eveneens volgens 2.12a

$$\int_{0}^{a} H(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} 0\,\mathrm{d}x = 0,$$

een "rechthoek" met hoogte 0. We kunnen nog opmerken dat $H(a) = 1 \neq 0$ maar volgens 2.12i verandert dat de integraal niet. We concluderen dat $\int_{-a}^{a} \big(G(x) + H(x)\big)\,\mathrm{d}x = a$.

4. Voor een zekere functie f geldt dat **2 pt.**

$$\lim_{x\to 9} \frac{f(x) - 12}{\sin(x-9)} = -16.$$

Is het mogelijk om met deze informatie $\lim_{x\to 9} f(x)$ te bepalen?
Indien wel: leg uit hoe; indien niet: leg uit waarom niet. (Je uitleg mag kort en informeel zijn, als het maar wel duidelijk is dat je de opgave goed begrijpt.)

Uitwerking: Ja, dat is mogelijk.

Oplossing 1 De noemer heeft limiet 0, maar uit de opgave blijkt dat de limiet van de breuk bestaat; dit kan alleen als de teller ook limiet 0 heeft (anders zou immers de limiet van de breuk $\pm\infty$ zijn).
Dus $\lim_{x\to 9}\big(f(x) - 12\big) = 0$, waaruit we met stelling 2.3.a concluderen dat $\lim_{x\to 9} f(x) = 12$.

Oplossing 2 Er geldt $\lim_{x\to 9} \sin(x-9) = \lim_{x\to 0} \sin x = 0$ volgens oefening 202b. Vervolgens passen we stelling 2.3c toe: de limiet van het product is het product van de limieten, hier dus

$$\lim_{x\to 9}\left(\frac{f(x)-12}{\sin(x-9)} \cdot \sin(x-9)\right) = \lim_{x\to 9} \frac{f(x)-12}{\sin(x-9)} \cdot \lim_{x\to 9} \sin(x-9) = -16 \cdot 0 = 0,$$

maar dan geldt ook door te vereenvoudigen:

$$\lim_{x\to 9}\left(\frac{f(x)-12}{\sin(x-9)} \cdot \sin(x-9)\right) = \lim_{x\to 9}\,(f(x) - 12) = 0,$$

waaruit we concluderen dat $\lim_{x\to 9} f(x) = 12$.