Antwoorden tentamen Wat is Wiskunde (WISB101)
Maandag 5 november 2018

Docenten: *Carel Faber & Gil Cavalcanti & Barbara van den Berg & Harry Smit & Guido Terra-Bleeker & Johan van de Leur*

Opgave 1 (nieuw vel papier)

(a). (*5 punten*) Laat P, Q en R beweringen zijn. Bewijs dat de beweringen

$$(P \vee Q) \Rightarrow R \qquad \text{en} \qquad (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$$

logisch equivalent zijn.

(b). (*5 punten*) Laat X en Y deelverzamelingen zijn van een universele verzameling U. Bewijs:

$$\overline{(X \cup \overline{Y})} = Y - X.$$

(Hier staat $\overline{A} = U - A$ voor het complement van A.)

Uitwerking.

(a). Dit kan met een waarheidstabel:

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow R$	$P \Rightarrow R$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	F	F
F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T

Aangezien de vijfde en de achtste kolom overeenkomen, is de logische equivalentie bewezen.

Een andere redenatie gaat als volgt. De implicatie $(P \vee Q) \Rightarrow R$ geldt precies dan als $P \vee Q$ onwaar is of R waar is, d.w.z., precies dan als R waar is of P en Q allebei onwaar zijn. De bewering $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$ geldt zeker als R waar is, want dan gelden beide implicaties. Als R onwaar is, geldt de bewering precies dan als zowel P als Q onwaar zijn. We hebben bewezen dat de twee samengestelde beweringen inderdaad logisch equivalent zijn.

(b). Laat $u \in U$. Als $u \in \overline{(X \cup \overline{Y})}$, dan $u \notin (X \cup \overline{Y})$, dus $u \notin X$ en $u \notin \overline{Y}$, dus $u \in Y$ en $u \notin X$, dus $u \in Y - X$. Omgekeerd, als $u \in Y - X$, dan $u \in Y$ en $u \notin X$, dus $u \notin \overline{Y}$ en $u \notin X$, dus $u \notin (X \cup \overline{Y})$, dus $u \in \overline{(X \cup \overline{Y})}$. De gewenste gelijkheid van de twee verzamelingen is bewezen.

Opgave 2 (nieuw vel papier)

(a). (*3 punten*) Laat $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door $f(x) = (x-1)^2 + 1$. Bewijs dat f niet injectief is.

(b). (*3 punten*) Laat $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door $h(x) = e^{\left((x-1)^2+1\right)}$. Bewijs dat h niet injectief is.

(c). (*4 punten*) Laat $f\colon X \to Y$ en $g\colon Y \to Z$ functies zijn. Bewijs: als f niet injectief is, dan is $g \circ f$ ook niet injectief.

Uitwerking.

(a). Voor reële getallen s en t geeft $f(s) = f(t)$ dat $(s-1)^2 = (t-1)^2$, dus $s-1 = \pm(t-1)$, dus $s-1 = t-1$ of $s-1 = 1-t$, dus $s = t$ (allicht) of $s = 2-t$. Voor elke t geldt dus $f(t) = f(2-t)$. Neem $t \neq 1$, zodat $t \neq 2-t$; er volgt dat f niet injectief is.

Alternatief: de grafiek van f is een dalparabool met "top" in $(1,1)$. Elke horizontale lijn $y = c$ met $c > 1$ snijdt de grafiek in twee verschillende punten. Direct volgt dat f niet injectief is.

(b). Laten we (a) gebruiken! We weten dat $f(0) = f(2)$, ofwel $(x-1)^2$ neemt dezelfde waarden aan voor $x = 0$ en $x = 2$. Onmiddellijk volgt dat $h(0) = h(2)$, want $h(x) = e^{f(x)}$. Dus h is niet injectief.

(c). Nu het abstracte geval. Er bestaan s en t in X met $s \neq t$ en $f(s) = f(t)$. Dan $(g \circ f)(s) = g(f(s)) = g(f(t)) = (g \circ f)(t)$ (en $s \neq t$). Dus $g \circ f$ is niet injectief. Opmerking: (b) hierboven is het geval

$$f(x) = (x-1)^2, \quad g(x) = e^x, \quad h = g \circ f, \quad X = Y = Z = \mathbb{R}.$$

Opgave 3 (nieuw vel papier)

(a). (*6 punten*) Bewijs met volledige inductie dat

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{j}{2^j} = \frac{2^{(n+1)} - n - 2}{2^n}$$

voor alle $n \in \mathbb{N}$.

(b). (*4 punten*) Bepaal

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{2^j}\,.$$

Je mag gebruik maken van het feit dat $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

Uitwerking.

(a). Beginstap: voor $n = 1$ bestaat de som slechts uit één term en is gelijk aan $1/2$. De formule rechts geeft $(2^{1+1} - 1 - 2)/2^1 = (2^2 - 3)/2 = (4-3)/2 = 1/2$. De beginstap geldt.

Inductiestap: neem aan dat $\sum_{j=1}^{m} \frac{j}{2^j} = \frac{2^{(m+1)}-m-2}{2^m}$ voor $m \in \mathbb{N}$. Dan

$$\sum_{j=1}^{m+1} \frac{j}{2^j} = \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{j}{2^j}\right) + \frac{m+1}{2^{m+1}} = \frac{2^{(m+1)}-m-2}{2^m} + \frac{m+1}{2^{m+1}} = \frac{2(2^{(m+1)}-m-2)+m+1}{2^{m+1}}$$
$$= \frac{2^{m+2}-2m-4+m+1}{2^{m+1}} = \frac{2^{m+2}-m-3}{2^{m+1}} = \frac{2^{(m+1)+1}-(m+1)-2}{2^{m+1}},$$

wat de inductiestap geeft. De gevraagde formule is bewezen met volledige inductie.

(b). Per definitie convergeert een reeks als de rij van partiële sommen convergeert; en de som van de reeks is dan de limiet van de rij. We moeten dus de limiet bepalen van $(2^{(n+1)}-n-2)/2^n$ als n naar oneindig gaat. Volgens de rekenregels voor limieten geldt, mits de limieten rechts van het eerste gelijkteken bestaan:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{(n+1)}-n-2}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{(n+1)}}{2^n} + \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{2^n} + \lim_{n\to\infty} \frac{-2}{2^n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} 2 - \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} - \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2^n} = 2 - 0 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}},$$

waarbij we in de laatste gelijkheid gebruik maken van het gegeven feit. Het is duidelijk dat $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$: voor $\epsilon > 0$, neem bijvoorbeeld $N = \max(1, \lceil \log_2(1/\epsilon) \rceil + 1)$, dan $N \in \mathbb{N}$ en voor $n > N$ geldt $2^{(n-1)} > 1/\epsilon$ dus $|1/(2^{n-1})| < \epsilon$. Dus $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{(n+1)}-n-2}{2^n} = 2$. Dus $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{2^j} = 2$.

(Opmerking: we gebruiken hier eenvoudige rekenregels voor limieten van *rijen* die analoog zijn aan bekende rekenregels voor limieten van *functies*: de limiet van een som van twee rijen is gelijk aan de som van de limieten (mits die bestaan); en $\lim_{n\to\infty} -a_n = -\lim_{n\to\infty} a_n$. Het is duidelijk en bovendien eenvoudig te bewijzen dat deze rekenregels gelden.)

Opgave 4 (nieuw vel papier)

Deze opgave gaat over het vergelijken van kardinaliteiten van verzamelingen. Bewijs in elke deelopgave (a) - (c) of de gegeven verzamelingen X en Y voldoen aan de relatie $|X| < |Y|$, $|X| = |Y|$ of $|Y| < |X|$.

(a). (*3 punten*) $X = \{x \in \mathbb{Z}_5 | x^2 + [4] = [0] \text{ in } \mathbb{Z}_5\}$ en $Y = \mathbb{Z}_2$.

(b). (*3 punten*) $X = \mathbb{Q}$ en $Y = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (de machtsverzameling van $\mathbb{N}$).

(c). (*4 punten*) $X = \mathbb{R}$ en $Y = \cup_{i\in\mathbb{N}}(i-1, i)$, waar $(i-1, i)$ staat voor het interval $(i-1, i) = \{x \in \mathbb{R} | i-1 < x < i\}$ in $\mathbb{R}$.

Uitwerking.

(a). We weten dat $\mathbb{Z}_n$, de verzameling van equivalentieklassen voor de equivalentierelatie op $\mathbb{Z}$ gegeven door $a\,R\,b$ precies als $n|(a-b)$, uit n elementen bestaat. Dus $|Y| = 2$ (en $|\mathbb{Z}_5| = 5$). We weten ook dat de optelling en vermenigvuldiging in $\mathbb{Z}_n$ welgedefinieerd zijn, via $[a]+[b] = [a+b]$ en $[a][b] = [ab]$. We moeten de $x \in \mathbb{Z}_5$ vinden met $x^2+[4] = [0]$. We weten dat $\mathbb{Z}_5 = \{[0],[1],[2],[3],[4]\}$. Welnu, $[0]^2 + [4] = [0] + [4] = [4]$, $[1]^2 + [4] = [1] + [4] = [5] = [0]$, $[2]^2 + [4] = [4] + [4] = [8] = [3]$, $[3]^2 + [4] = [9] + [4] = [13] = [3]$ en $[4]^2 + [4] = [16] + [4] = [20] = [0]$ in $\mathbb{Z}_5$. Trouwens, aangezien $x^2 = (-x)^2$ voor $x \in \mathbb{Z}$

geldt ook $[1]^2 = [4]^2$ en $[2]^2 = [3]^2$ in $\mathbb{Z}_5$, wat we hadden kunnen gebruiken. In elk geval: $X = \{[1], [4]\} \subseteq \mathbb{Z}_5$, dus $|X| = 2$, dus $|X| = |Y|$.

(b). We weten dat $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ aangezien $\mathbb{Q}$ aftelbaar oneindig is. We weten ook dat $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ voor elke verzameling A. Neem $A = \mathbb{N}$, dan $|X| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |Y|$, dus $|X| < |Y|$. (Merk op dat er een injectie bestaat van X naar Y, maar geen bijectie.)

(c). Hier is het handig om de stelling van Schröder-Bernstein te gebruiken. Volgens een resultaat in het boek zijn $(0, 1)$ en $\mathbb{R}$ numeriek equivalent, dus er bestaat een bijectie van X naar $(0, 1)$. Maar $(0, 1)$ is een van de intervallen in Y, dus die bijectie geeft een injectie van X naar $Y = (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3) \cup \ldots$. Omgekeerd, Y is een deelverzameling van $X = \mathbb{R}$, dus we krijgen een injectie van Y naar X cadeau. Volgens de S-B-stelling geldt $|X| = |Y|$.

Opgave 5 (nieuw vel papier)

We zeggen dat een rij $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ van reële getallen *begrensd* is als er een positief reëel getal M bestaat zodat $|b_n| < M$ voor alle n.

(a). (*6 punten*) Geef een ε-N-bewijs voor: als $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ en $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is begrensd, dan $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = 0$.

(b). (*4 punten*) Gebruik makend van (a), bepaal $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sin(\frac{1}{n})$.

Uitwerking.

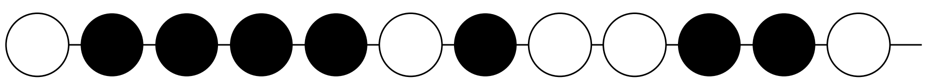
(a). Eerst even het idee: we kunnen $|a_n|$ willekeurig klein krijgen door n groot genoeg te nemen. Anderzijds, $|b_n| < M$ voor alle n. Dan moeten we $|a_n b_n| = |a_n||b_n|$ ook willekeurig klein kunnen krijgen, door n nog groter te nemen.

Het bewijs: Neem aan $\epsilon > 0$. Laat $\epsilon_1 = \epsilon/M > 0$. Dan bestaat er een $N \in \mathbb{N}$ zodat voor $n > N$ geldt dat $|a_n| < \epsilon_1$. Voor zulke n geldt dan ook $|a_n b_n| = |a_n||b_n| < \epsilon_1 M = \epsilon$. Einde bewijs.

(b). Bekend is dat $\{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$ naar 0 convergeert. Anderzijds, voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt $|\sin(x)| \leq 1$, dus $\{\sin(1/n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ is begrensd (neem bijv. $M = 2$). Met behulp van (a) volgt dat $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sin(\frac{1}{n}) = 0$. (Opmerking: je kunt de rollen van a_n en b_n in dit bewijs verwisselen, want ook $\{\sin(1/n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert naar 0. Dit is wel meer werk.)

Opgave 6 (nieuw vel papier)

In deze opgave beschouwen we de verzameling van rijtjes gekleurde cirkels, waarvan (het begin van) één mogelijk element hieronder als voorbeeld is weergegeven:



Elk rijtje bestaat uit oneindig veel cirkels (één voor elk natuurlijk getal) en elke cirkel is ofwel wit, ofwel zwart. Met andere woorden, elke rijtje wordt gedefinieerd door $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ waarbij $c_n \in \{○, ●\}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. We definiëren nu een relatie R op de verzameling $\mathcal{C}$ van dergelijke rijtjes door

$$\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \; R \; \{d_n\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{precies dan als} \qquad \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, c_n = d_n \,. \tag{1}$$

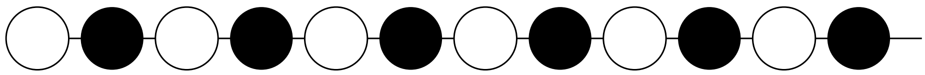
Met andere woorden: twee rijtjes zijn gerelateerd precies dan als ze hetzelfde zijn vanaf een zekere $N \in \mathbb{N}$.

(a). (*5 punten*) Laat zien dat R een equivalentierelatie is.

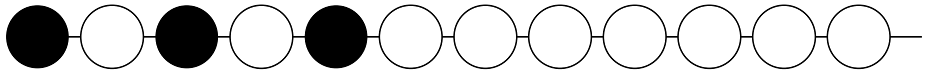
Beschouw nu het rijtje $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ waarvoor $w_n = \bigcirc$ voor alle $n \in \mathbb{N}$; oftewel, het rijtje met alleen witte cirkels. De equivalentieklasse van dit rijtje noemen we $W = \Big[\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}\Big]$.

(b). (*2 punten*) Welke van de volgende twee rijtjes zijn elementen van de verzameling W?

(i) het rijtje met afwisselend witte (alle oneven) en zwarte (alle even) cirkels:



(ii) het rijtje met eerst een zwarte, witte, zwarte, witte en zwarte cirkel en daarna alleen nog maar witte cirkels:



(c). (*0 punten*, als hint voor de volgende vraag) Beschrijf alle elementen van W.

Definieer tenslotte de functie van W naar $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ door

$$f\colon W \to \mathcal{P}(\mathbb{N}):\ \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \Big\{n \in \mathbb{N} \;\Big|\; c_n = \bullet\Big\}. \tag{2}$$

(d). (*3 punten*) Laat zien dat het bereik van de functie f gelijk is aan $\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, N\})$.

Uitwerking.

(a). De reflexiviteit is evident: we kunnen $N = 1$ nemen. De symmetrie is eveneens duidelijk: als $a_n = b_n$ voor alle $n \geq N$, dan ook $b_n = a_n$ voor alle $n \geq N$. Tenslotte de transitiviteit: stel $a_n = b_n$ voor alle $n \geq N_1$ en $b_n = c_n$ voor alle $n \geq N_2$. Neem $N = \max(N_1, N_2)$, dan ($N \in \mathbb{N}$ en) $a_n = b_n = c_n$ voor alle $n \geq N$, want $N \geq N_1$ en $N \geq N_2$.

(b). Het eerstgenoemde rijtje is geen element van W, omdat er voor elke $N \in \mathbb{N}$ een even getal n bestaat met $n \geq N$. De $n$de cirkel is dan zwart. Het tweede rijtje is wel een element van W: neem $N = 6$; alle cirkels vanaf de zesde zijn wit.

(c). Voor elk element van W geldt dat er een $M \in \mathbb{N}$ bestaat zodat alle cirkels vanaf de Mde wit zijn. De $M - 1$ cirkels daarvóór kunnen willekeurig gekozen worden. Een element van W bestaat dus uit een *eindig* volstrekt willekeurig rijtje (van witte en zwarte cirkels) gevolgd door alleen witte cirkels (oneindig veel).

(d). Begin met een element x van W. Neem een M als in de uitwerking van (c) en zorg ervoor dat $M \geq 2$ (wat evident mogelijk is). Neem dan $N = M - 1 \in \mathbb{N}$. Het beeld $f(x)$ is dan gelijk aan de volstrekt willekeurige deelverzameling van $\{1, 2, \ldots, N\}$ van de getallen die met de zwarte cirkels in x corresponderen. Met andere woorden, $f(x)$ is een willekeurig element van $\mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, N\})$. De willekeurige eindige rijtjes waarmee de elementen van W beginnen zijn weliswaar eindig, maar hun lengte N is niet begrensd! Elke $N \in \mathbb{N}$ en elke deelverzameling van $\{1, 2, \ldots, N\}$ komen voor. Dus het bereik van f is gelijk aan $\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, N\})$.

Exam “Wat is Wiskunde” (WISB101)
Monday, November 5, 2018, 17:00 - 20:00

Instructors: *Carel Faber & Gil Cavalcanti & Barbara van den Berg & Harry Smit & Guido Terra-Bleeker & Johan van de Leur*

Exercise 1 (new sheet of paper)

(a). (*5 points*) For statements P, Q and R, show that the statements

$$(P \vee Q) \Rightarrow R \qquad \text{and} \qquad (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$$

are logically equivalent.

(b). (*5 points*) Given X and Y subsets of a universal set U, show that

$$\overline{(X \cup \overline{Y})} = Y - X.$$

(Recall that $\overline{A} = U - A$ is the complement of A.)

Solution.

(a). We may use a truth table:

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow R$	$P \Rightarrow R$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	F	F
F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T

Since the fifth and the eighth column agree, the desired logical equivalence has been proved.

Alternatively: The implication $(P \vee Q) \Rightarrow R$ holds if and only if $P \vee Q$ is false or R is true, i.e., exactly if R is true or P and Q are both false. The statement $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$ certainly holds if R is true, for then both implications hold. If R is false, the statement holds if and only if both P and Q are false. We have proved that the two composite statements are logically equivalent indeed.

(b). Let $u \in U$. If $u \in \overline{(X \cup \overline{Y})}$, then $u \notin (X \cup \overline{Y})$, so $u \notin X$ and $u \notin \overline{Y}$, so $u \in Y$ and $u \notin X$, so $u \in Y - X$. Conversely, if $u \in Y - X$, then $u \in Y$ and $u \notin X$, so $u \notin \overline{Y}$ and $u \notin X$, so $u \notin (X \cup \overline{Y})$, so $u \in \overline{(X \cup \overline{Y})}$. The desired equality of the two sets has been proved.

Exercise 2 (new sheet of paper)

(a). (*3 points*) Let $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be given by $f(x) = (x-1)^2 + 1$. Show that f is not injective.

(b). (*3 points*) Let $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be given by $h(x) = e^{\left((x-1)^2+1\right)}$. Show that h is not injective.

(c). (*4 points*) Let $f\colon X \to Y$ and $g\colon Y \to Z$ be functions. Show that if f is not injective then $g \circ f$ is also not injective.

Solution.

(a). Let s and t be real numbers. Then $f(s) = f(t)$ gives $(s-1)^2 = (t-1)^2$, so $s-1 = \pm(t-1)$, so $s-1 = t-1$ or $s-1 = 1-t$, so $s = t$ (obviously) or $s = 2-t$. So for each t we have $f(t) = f(2-t)$. Take $t \neq 1$, so that $t \neq 2-t$; it follows that f is not injective.

Alternatively: the graph of f is a parabola with vertex at $(1,1)$. Each horizontal line $y = c$ with $c > 1$ intersects it at two distinct points. It directly follows that f is not injective.

(b). Let us use (a)! We know that $f(0) = f(2)$, so $(x-1)^2$ takes the same values at $x = 0$ and $x = 2$. It follows rightaway that $h(0) = h(2)$, since $h(x) = e^{f(x)}$. So h is not injective.

(c). Now the abstract case. There exist s and t in X with $s \neq t$ and $f(s) = f(t)$. Then $(g \circ f)(s) = g(f(s)) = g(f(t)) = (g \circ f)(t)$ (and $s \neq t$). So $g \circ f$ is not injective. Remark: (b) above is the case

$$f(x) = (x-1)^2, \quad g(x) = e^x, \quad h = g \circ f, \quad X = Y = Z = \mathbb{R}.$$

Exercise 3 (new sheet of paper)

(a). (*6 points*) Using mathematical induction, prove that

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{j}{2^j} = \frac{2^{(n+1)} - n - 2}{2^n}$$

for all $n \in \mathbb{N}$.

(b). (*4 points*) Determine

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{2^j}\,.$$

You may use the fact that $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

Solution.

(a). Beginning step: for $n = 1$ the sum consists of one term only and equals $1/2$. The formula on the right gives $(2^{1+1} - 1 - 2)/2^1 = (2^2 - 3)/2 = (4-3)/2 = 1/2$. The beginning step holds.

Induction step: assume that $\sum_{j=1}^{m} \frac{j}{2^j} = \frac{2^{(m+1)}-m-2}{2^m}$ for $m \in \mathbb{N}$. Then

$$\sum_{j=1}^{m+1} \frac{j}{2^j} = \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{j}{2^j}\right) + \frac{m+1}{2^{m+1}} = \frac{2^{(m+1)}-m-2}{2^m} + \frac{m+1}{2^{m+1}} = \frac{2(2^{(m+1)}-m-2)+m+1}{2^{m+1}}$$
$$= \frac{2^{m+2}-2m-4+m+1}{2^{m+1}} = \frac{2^{m+2}-m-3}{2^{m+1}} = \frac{2^{(m+1)+1}-(m+1)-2}{2^{m+1}},$$

which gives the induction step. The desired formula has been proved with mathematical induction.

(b). By definition, a series converges if the sequence of partial sums converges; and the sum of the series is then equal to the limit of the sequence. So we need to determine the limit of $(2^{(n+1)}-n-2)/2^n$ when n goes to infinity. According to the fundamental properties of limits,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{(n+1)}-n-2}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{(n+1)}}{2^n} + \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{2^n} + \lim_{n\to\infty} \frac{-2}{2^n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} 2 - \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} - \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2^n} = 2 - 0 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}},$$

if the limits to the right of the first equality sign exist. In the last equality, we have used the given fact. It is clear that $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$: for $\epsilon > 0$, take, e.g., $N = \max(1, \lceil \log_2(1/\epsilon) \rceil + 1)$, then $N \in \mathbb{N}$ and for $n > N$ one has $2^{(n-1)} > 1/\epsilon$ so $|1/(2^{n-1})| < \epsilon$. So $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{(n+1)}-n-2}{2^n} = 2$. So $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{2^j} = 2$.

(Remark: we use here simple properties for limits of *sequences* that are analogous to known properties of limits of *functions*: the limit of a sum of two sequences equals the sum of the limits (if those exist); and $\lim_{n\to\infty} -a_n = -\lim_{n\to\infty} a_n$. It is clear and easy to prove that these properties hold.)

Exercise 4 (new sheet of paper)

This exercise is about comparing cardinalities of sets. Prove in each subquestion (a) - (c) whether the given sets X and Y satisfy the relation $|X| < |Y|$, $|X| = |Y|$ or $|Y| < |X|$.

(a). (*3 points*) $X = \{x \in \mathbb{Z}_5 | x^2 + [4] = [0] \text{ in } \mathbb{Z}_5\}$ and $Y = \mathbb{Z}_2$.

(b). (*3 points*) $X = \mathbb{Q}$ and $Y = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, where $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ denotes the power set of $\mathbb{N}$.

(c). (*4 points*) $X = \mathbb{R}$ and $Y = \cup_{i\in\mathbb{N}}(i-1, i)$, where $(i-1, i)$ denotes the interval $(i-1, i) = \{x \in \mathbb{R} | i-1 < x < i\}$ in $\mathbb{R}$.

Solution.

(a). We know that $\mathbb{Z}_n$, the set of equivalence classes for the equivalence relation on $\mathbb{Z}$ given by $a\,R\,b$ exactly when $n|(a-b)$, has n elements. So $|Y| = 2$ (and $|\mathbb{Z}_5| = 5$). Recall that addition and multiplication in $\mathbb{Z}_n$ are well-defined, via $[a]+[b] = [a+b]$ and $[a][b] = [ab]$. We need to find the $x \in \mathbb{Z}_5$ with $x^2 + [4] = [0]$. We know $\mathbb{Z}_5 = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$. Now $[0]^2 + [4] = [0] + [4] = [4]$, $[1]^2 + [4] = [1] + [4] = [5] = [0]$, $[2]^2 + [4] = [4] + [4] = [8] = [3]$, $[3]^2 + [4] = [9] + [4] = [13] = [3]$ and $[4]^2 + [4] = [16] + [4] = [20] = [0]$ in $\mathbb{Z}_5$. Actually, since $x^2 = (-x)^2$ for $x \in \mathbb{Z}$, we could have used that $[1]^2 = [4]^2$ and $[2]^2 = [3]^2$. In any case, $X = \{[1], [4]\} \subseteq \mathbb{Z}_5$, so $|X| = 2$, so $|X| = |Y|$.

(b). We know that $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ since $\mathbb{Q}$ is denumerable. We also know that $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ for any set A. Taking $A = \mathbb{N}$, we find that $|X| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |Y|$, so $|X| < |Y|$. (Note that there exists an injection from X to Y, but no bijection.)

(c). Here it is convenient to use the Schröder-Bernstein theorem. By a result in the book, $(0, 1)$ and $\mathbb{R}$ are numerically equivalent, so there exists a bijection f from X to $(0, 1)$. But $(0, 1)$ is one of the intervals making up Y, so f gives an injection from X to $Y = (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3) \cup \ldots$. Conversely, Y is a subset of $X = \mathbb{R}$, so we get an injection from Y to X for free. By the S-B theorem, $|X| = |Y|$.

Exercise 5 (new sheet of paper)

We say that a sequence of real numbers $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is *bounded* if there exists a positive real number M such that $|b_n| < M$ for all n.

(a). (*6 points*) Give an ε-N-proof that if $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ and $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded, then $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = 0$.

(b). (*4 points*) Using (a), determine $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sin(\frac{1}{n})$.

Solution.

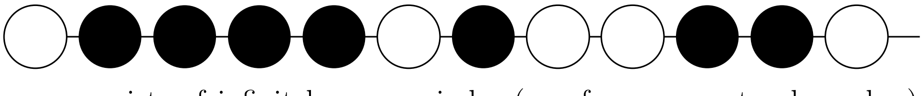
(a). First the idea: we can get $|a_n|$ arbitrarily small by taking n large enough. On the other hand, $|b_n| < M$ for all n. Then we should be able to get $|a_n b_n| = |a_n||b_n|$ arbitrarily small as well, by taking n even larger.

The proof: Assume $\epsilon > 0$. Let $\epsilon_1 = \epsilon/M > 0$. Then there exists an $N \in \mathbb{N}$ such that for $n > N$ one has $|a_n| < \epsilon_1$. For such n one also has $|a_n b_n| = |a_n||b_n| < \epsilon_1 M = \epsilon$. End of proof.

(b). It is known that $\{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converges to 0. On the other hand, for each $x \in \mathbb{R}$ one has $|\sin(x)| \leq 1$, so $\{\sin(1/n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded (take, e.g., $M = 2$). From (a) it follows that $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sin(\frac{1}{n}) = 0$. (Remark: the roles of a_n and b_n in the proof can be switched, since $\{\sin(1/n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converges to 0 as well. This is more work, however.)

Exercise 6 (new sheet of paper)

In this exercise we consider the set $\mathcal{C}$ of sequences of coloured circles. An example of (the start of) such a sequence is shown below:



Each sequence consists of infinitely many circles (one for every natural number) and each circle is either black of white. In other words, each sequence is defined by $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ where $c_n \in \{$◯,●$\}$ for all $n \in \mathbb{N}$. We define the relation R on the set $\mathcal{C}$ by

$$\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}\ R\ \{d_n\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{if and only if} \qquad \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N,\ c_n = d_n\,. \tag{1}$$

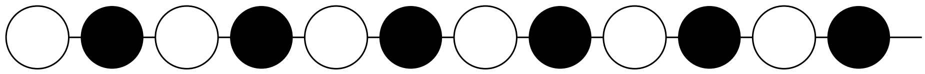
In other words: two sequences are related if and only if they are the same as of some $N \in \mathbb{N}$.

(a). (*5 points*) Show that R is an equivalence relation.

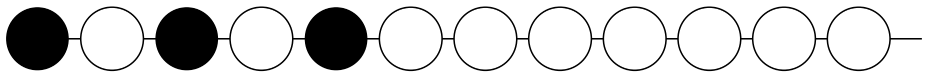
Next consider the particular sequence $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ for which $w_n = \bigcirc$ for all $n \in \mathbb{N}$; that is, the sequence that consists of white circles only. We denote the equivalence class of this sequence by $W = \Big[\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}\Big]$.

(b). (*2 points*) Which of the following sequences are elements of the set W?

(i) the sequence with alternating white (all odd) and black (all even) circles:



(ii) the sequence that starts with a black, white, black, white and a black circle, followed by all-white circles:



(c). (*0 points*, as a hint for the next question) Describe all elements of W.

Finally, we define the function from W to $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ by

$$f\colon W \to \mathcal{P}(\mathbb{N}) : \ \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \Big\{n \in \mathbb{N} \ \Big|\ c_n = \bullet\Big\}. \tag{2}$$

(d). (*3 points*) Show that the range of the function f equals $\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{P}(\{1, 2, \dots, N\})$.

Solution.

(a). The reflexivitity is evident: we can take $N = 1$. The symmetry is also clear: if $a_n = b_n$ for all $n \geq N$, then also $b_n = a_n$ for all $n \geq N$. Finally, the transitivity: suppose $a_n = b_n$ for all $n \geq N_1$ and $b_n = c_n$ for all $n \geq N_2$. Take $N = \max(N_1, N_2)$, then ($N \in \mathbb{N}$ and) $a_n = b_n = c_n$ for all $n \geq N$, since $N \geq N_1$ and $N \geq N_2$.

(b). The first sequence is not an element of W, since there exists for each $N \in \mathbb{N}$ an even number n with $n \geq N$. The nth circle is then black. The second sequence is an element of W: take $N = 6$; all circles as of the sixth are white.

(c). For each element of W there exists an $M \in \mathbb{N}$ such that all circles as of the Mth are white. The $M - 1$ circles before that can be chosen arbitrarily. An element of W therefore exists of a *finite* arbitrary sequence (of white and black circles) followed by only white circles (infinitely many).

(d). Begin with an element x of W. Take an M as in the solution of (c) and make sure that $M \geq 2$ (which evidently is possible). Take then $N = M - 1 \in \mathbb{N}$. The image $f(x)$ is then equal to the arbitrary subset of $\{1, 2, \dots, N\}$ of the numbers that correspond with the black circles in x. In other words, $f(x)$ is an arbitrary element of $\mathcal{P}(\{1, 2, \dots, N\})$. The arbitrary finite sequences with which the elements of W begin are indeed finite, but their length N is not bounded! Each $N \in \mathbb{N}$ and each subset of $\{1, 2, \dots, N\}$ occur. So the range of f is equal to $\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{P}(\{1, 2, \dots, N\})$.