Tentamen Wat is Wiskunde (WISB101)
Maandag 5 november 2018, 17:00 - 20:00

Docenten: *Carel Faber & Gil Cavalcanti & Barbara van den Berg & Harry Smit & Guido Terra-Bleeker & Johan van de Leur*

- GEBRUIK EEN APART VEL VOOR IEDERE OPGAVE. Het tentamen bestaat uit zes opgaven die elk even zwaar meetellen.
- Dit tentamen bevat een NEDERLANDSE en een ENGELSE VERSIE. De Engelse versie staat na de Nederlandse versie. **The English exam follows below.**
- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.
- Het gebruik van telefoons, computers, rekenmachines, boeken of aantekeningen is niet toegestaan.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt en bewijs al je beweringen.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt bewijzen, mag je dat resultaat in het vervolg wel gebruiken.

Opgave 1 (nieuw vel papier)

(a). (*5 punten*) Laat P, Q en R beweringen zijn. Bewijs dat de beweringen

$$(P \vee Q) \Rightarrow R \qquad \text{en} \qquad (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$$

logisch equivalent zijn.

(b). (*5 punten*) Laat X en Y deelverzamelingen zijn van een universele verzameling U. Bewijs:

$$\overline{(X \cup \overline{Y})} = Y - X.$$

(Hier staat $\overline{A} = U - A$ voor het complement van A.)

Opgave 2 (nieuw vel papier)

(a). (*3 punten*) Laat $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door $f(x) = (x-1)^2 + 1$. Bewijs dat f niet injectief is.

(b). (*3 punten*) Laat $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door $h(x) = e^{\left((x-1)^2+1\right)}$. Bewijs dat h niet injectief is.

(c). (*4 punten*) Laat $f\colon X \to Y$ en $g\colon Y \to Z$ functies zijn. Bewijs: als f niet injectief is, dan is $g \circ f$ ook niet injectief.

Opgave 3 (nieuw vel papier)

(a). (*6 punten*) Bewijs met volledige inductie dat

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{j}{2^j} = \frac{2^{(n+1)} - n - 2}{2^n}$$

voor alle $n \in \mathbb{N}$.

(b). (*4 punten*) Bepaal

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{2^j} .$$

Je mag gebruik maken van het feit dat $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

Opgave 4 (nieuw vel papier)

Deze opgave gaat over het vergelijken van kardinaliteiten van verzamelingen. Bewijs in elke deelopgave (a) - (c) of de gegeven verzamelingen X en Y voldoen aan de relatie $|X| < |Y|$, $|X| = |Y|$ of $|Y| < |X|$.

(a). (*3 punten*) $X = \{x \in \mathbb{Z}_5 | x^2 + [4] = [0] \text{ in } \mathbb{Z}_5\}$ en $Y = \mathbb{Z}_2$.

(b). (*3 punten*) $X = \mathbb{Q}$ en $Y = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (de machtsverzameling van $\mathbb{N}$).

(c). (*4 punten*) $X = \mathbb{R}$ en $Y = \cup_{i\in\mathbb{N}}(i-1, i)$, waar $(i-1, i)$ staat voor het interval $(i-1, i) = \{x \in \mathbb{R} | i - 1 < x < i\}$ in $\mathbb{R}$.

Opgave 5 (nieuw vel papier)

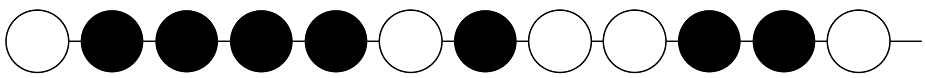
We zeggen dat een rij $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ van reële getallen *begrensd* is als er een positief reëel getal M bestaat zodat $|b_n| < M$ voor alle n.

(a). (*6 punten*) Geef een ε-N-bewijs voor: als $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ en $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is begrensd, dan $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = 0$.

(b). (*4 punten*) Gebruik makend van (a), bepaal $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sin(\frac{1}{n})$.

Opgave 6 (nieuw vel papier)

In deze opgave beschouwen we de verzameling van rijtjes gekleurde cirkels, waarvan (het begin van) één mogelijk element hieronder als voorbeeld is weergegeven:



Elk rijtje bestaat uit oneindig veel cirkels (één voor elk natuurlijk getal) en elke cirkel is ofwel wit, ofwel zwart. Met andere woorden, elke rijtje wordt gedefinieerd door $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ waarbij $c_n \in \{\bigcirc, \bullet\}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. We definiëren nu een relatie R op de verzameling $\mathcal{C}$ van dergelijke rijtjes door

$$\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \; R \; \{d_n\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{precies dan als} \qquad \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \, c_n = d_n \,. \tag{1}$$

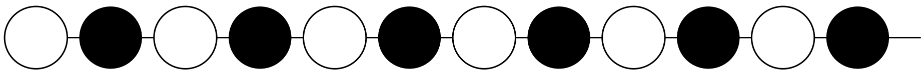
Met andere woorden: twee rijtjes zijn gerelateerd precies dan als ze hetzelfde zijn vanaf een zekere $N \in \mathbb{N}$.

(a). (*5 punten*) Laat zien dat R een equivalentierelatie is.

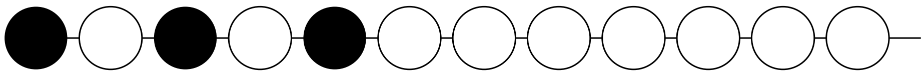
Beschouw nu het rijtje $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ waarvoor $w_n = \bigcirc$ voor alle $n \in \mathbb{N}$; oftewel, het rijtje met alleen witte cirkels. De equivalentieklasse van dit rijtje noemen we $W = \left[\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right]$.

(b). (*2 punten*) Welke van de volgende twee rijtjes zijn elementen van de verzameling W?

(i) het rijtje met afwisselend witte (alle oneven) en zwarte (alle even) cirkels:



(ii) het rijtje met eerst een zwarte, witte, zwarte, witte en zwarte cirkel en daarna alleen nog maar witte cirkels:



(c). (*0 punten*, als hint voor de volgende vraag) Beschrijf alle elementen van W.

Definieer tenslotte de functie van W naar $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ door

$$f\colon W \to \mathcal{P}(\mathbb{N}) : \; \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; c_n = \bullet \right\}. \tag{2}$$

(d). (*3 punten*) Laat zien dat het bereik van de functie f gelijk is aan $\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, N\})$.

EINDE TENTAMEN - ENGELSE VERTALING HIERONDER

THE ENGLISH EXAM FOLLOWS BELOW

Z.O.Z. / P.T.O.

Exam "Wat is Wiskunde" (WISB101)
Monday, November 5, 2018, 17:00 - 20:00

Instructors: *Carel Faber & Gil Cavalcanti & Barbara van den Berg & Harry Smit & Guido Terra-Bleeker & Johan van de Leur*

- USE A SEPARATE SHEET OF PAPER FOR EACH EXERCISE. The exam consists of six exercises, each worth 10 points.
- Write your name and student number on each sheet of paper.
- The use of phones, computers, calculators, books or notes is not allowed.
- Do not only give answers, but for each (sub)exercise show clearly how you obtain your answer and prove all your claims.
- Even if you don't succeed in proving part of an exercise, you may use the result in the remainder of the exercise.

Exercise 1 (new sheet of paper)

(a). (*5 points*) For statements P, Q and R, show that the statements

$$(P \vee Q) \Rightarrow R \qquad \text{and} \qquad (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$$

are logically equivalent.

(b). (*5 points*) Given X and Y subsets of a universal set U, show that

$$\overline{(X \cup \overline{Y})} = Y - X.$$

(Recall that $\overline{A} = U - A$ is the complement of A.)

Exercise 2 (new sheet of paper)

(a). (*3 points*) Let $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be given by $f(x) = (x-1)^2 + 1$. Show that f is not injective.

(b). (*3 points*) Let $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be given by $h(x) = e^{\left((x-1)^2+1\right)}$. Show that h is not injective.

(c). (*4 points*) Let $f\colon X \to Y$ and $g\colon Y \to Z$ be functions. Show that if f is not injective then $g \circ f$ is also not injective.

Exercise 3 (new sheet of paper)

(a). (*6 points*) Using mathematical induction, prove that

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{j}{2^j} = \frac{2^{(n+1)} - n - 2}{2^n}$$

for all $n \in \mathbb{N}$.

(b). (*4 points*) Determine

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{2^j}\,.$$

You may use the fact that $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

Exercise 4 (new sheet of paper)

This exercise is about comparing cardinalities of sets. Prove in each subquestion (a) - (c) whether the given sets X and Y satisfy the relation $|X| < |Y|$, $|X| = |Y|$ or $|Y| < |X|$.

(a). (*3 points*) $X = \{x \in \mathbb{Z}_5 | x^2 + [4] = [0] \text{ in } \mathbb{Z}_5\}$ and $Y = \mathbb{Z}_2$.

(b). (*3 points*) $X = \mathbb{Q}$ and $Y = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, where $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ denotes the power set of $\mathbb{N}$.

(c). (*4 points*) $X = \mathbb{R}$ and $Y = \cup_{i\in\mathbb{N}}(i-1, i)$, where $(i-1, i)$ denotes the interval $(i-1, i) = \{x \in \mathbb{R} | i - 1 < x < i\}$ in $\mathbb{R}$.

Exercise 5 (new sheet of paper)

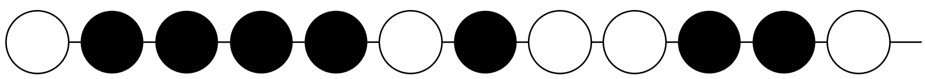
We say that a sequence of real numbers $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is *bounded* if there exists a positive real number M such that $|b_n| < M$ for all n.

(a). (*6 points*) Give an ε-N-proof that if $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ and $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded, then $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = 0$.

(b). (*4 points*) Using (a), determine $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sin(\frac{1}{n})$.

Exercise 6 (new sheet of paper)

In this exercise we consider the set $\mathcal{C}$ of sequences of coloured circles. An example of (the start of) such a sequence is shown below:



Each sequence consists of infinitely many circles (one for every natural number) and each circle is either black of white. In other words, each sequence is defined by $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ where $c_n \in \{\bigcirc, \bullet\}$ for all $n \in \mathbb{N}$. We define the relation R on the set $\mathcal{C}$ by

$$\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \; R \; \{d_n\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{if and only if} \qquad \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, c_n = d_n\,. \tag{1}$$

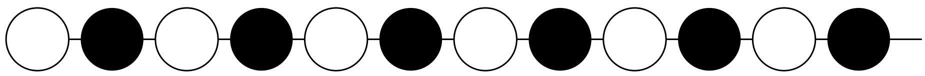
In other words: two sequences are related if and only if they are the same as of some $N \in \mathbb{N}$.

(a). (*5 points*) Show that R is an equivalence relation.

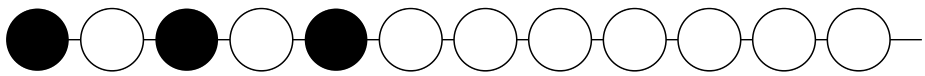
Next consider the particular sequence $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ for which $w_n = \bigcirc$ for all $n \in \mathbb{N}$; that is, the sequence that consists of white circles only. We denote the equivalence class of this sequence by $W = \Big[\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}\Big]$.

(b). (*2 points*) Which of the following sequences are elements of the set W?

(i) the sequence with alternating white (all odd) and black (all even) circles:



(ii) the sequence that starts with a black, white, black, white and a black circle, followed by all-white circles:



(c). (*0 points*, as a hint for the next question) Describe all elements of W.

Finally, we define the function from W to $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ by

$$f\colon W \to \mathcal{P}(\mathbb{N}) : \ \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \Big\{ n \in \mathbb{N} \ \Big| \ c_n = \bullet \Big\}. \tag{2}$$

(d). (*3 points*) Show that the range of the function f equals $\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, N\})$.