Tentamen Wat is Wiskunde (WISB101)
Donderdag 3 januari 2019, 9:00 - 12:00

Docenten: *Carel Faber & Gil Cavalcanti & Barbara van den Berg & Harry Smit & Guido Terra-Bleeker & Johan van de Leur*

- GEBRUIK EEN APART VEL VOOR IEDERE OPGAVE. Het tentamen bestaat uit zes opgaven die elk even zwaar meetellen.
- Dit tentamen bevat een NEDERLANDSE en een ENGELSE VERSIE. De Engelse versie staat na de Nederlandse versie. **The English exam follows below.**
- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.
- Het gebruik van telefoons, computers, rekenmachines, boeken of aantekeningen is niet toegestaan.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt en bewijs al je beweringen.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt bewijzen, mag je dat resultaat in het vervolg wel gebruiken.

Opgave 1 (nieuw vel papier)

(a). (*5 punten*) Laat P, Q en R beweringen zijn. Bepaal voor welke waarheidswaarden van P, Q en R de samengestelde bewering

$$P \vee ((Q \Rightarrow R) \wedge (P \Rightarrow (Q \wedge R)))$$

waar is.

(b). (*5 punten*) Laat A, B en C verzamelingen zijn. Bewijs dat

$$A - (B \cup C) \subseteq (A - B) \cup C.$$

Bewijs ook dat $A - (B \cup C) = (A - B) \cup C$ dan en slechts dan als $C = \emptyset$.

Opgave 2 (nieuw vel papier)

(a). (*7 punten*) De rij $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ wordt recursief gedefinieerd door $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ en

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0.$$

Bewijs met sterke volledige inductie dat de formule

$$a_n = (5 - n)2^{n-2}$$

geldt voor alle $n \in \mathbb{N}$.

(b). (*3 punten*) Bewijs dat $5|a_n$ geldt dan en slechts dan als $5|n$.

Opgave 3 (nieuw vel papier)

(a). (*3 punten*) Laat $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door $g(x) = x^2 + 1$. Bewijs dat g niet surjectief is.

(b). (*4 punten*) Laat $f\colon X \to Y$ en $g\colon Y \to Z$ functies zijn. Bewijs: als g niet surjectief is, dan is $g \circ f$ ook niet surjectief.

(c). (*3 punten*) Laat $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door $h(x) = e^{2x} - 2e^{-x} + e^{-4x} + 1$. Bewijs dat h niet surjectief is. Hint: Maak gebruik van (a) en (b).

Opgave 4 (nieuw vel papier)

(*10 punten*) Geef een ϵ-δ-bewijs dat

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-1} = 1.$$

Opgave 5 (nieuw vel papier)

In deze som zijn n en k gehele getallen met $n \geq 2$ en $k \geq 1$. Verder zijn er k positieve gehele getallen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ die allemaal congruent zijn met -1 modulo n:

$$a_i \equiv -1 \pmod{n} \qquad (1 \leq i \leq k).$$

De som van deze k getallen noteren we met S:

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_k = \sum_{i=1}^{k} a_i\,.$$

Deze opgave gaat over de vraag of we k kunnen bepalen als we over S een aantal dingen weten.

(a). (*2 punten*) Laat zien dat elk van de k getallen tenminste gelijk is aan $n - 1$:

$$a_i \geq n - 1 \qquad (1 \leq i \leq k).$$

(b). (*2 punten*) Laat r de rest zijn van S bij deling door n met rest, dus $S \equiv r \pmod{n}$ en $0 \leq r \leq n - 1$. Bewijs dat $k \equiv n - r \pmod{n}$.

(c). (*2 punten*) Bewijs dat $S \geq (n - r)(n - 1)$.

(d). (*2 punten*) Bewijs dat k uniek bepaald is als $S < (2n - r)(n - 1)$. Wat is k in dat geval?

(e). (*2 punten*) De prijzen van alle artikelen in een bepaalde winkel eindigen in 99 centen, bijvoorbeeld 0.99, 1.99, 3.99, enz. Een klant koopt een aantal artikelen en betaalt in totaal 38.87. Hoeveel artikelen heeft de klant gekocht? Motiveer je antwoord (zoals altijd).

Opgave 6 (nieuw vel papier)

Laat X een niet-lege verzameling zijn. We definiëren $\mathcal{P}^*(X)$ als de verzameling van de *niet-lege* deelverzamelingen van X.

(a). (*4 punten*) Als A en B niet-lege deelverzamelingen van X zijn, is $A \times B$ een niet-lege deelverzameling van $X \times X$. Bewijs dat

$$f\colon \mathcal{P}^*(X) \times \mathcal{P}^*(X) \to \mathcal{P}^*(X \times X), \qquad (A, B) \mapsto A \times B$$

een *injectieve* functie is.

(b). (*3 punten*) Gegeven is dat $|\mathcal{P}^*(\mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. Bewijs dat $|\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

(c). (*3 punten*) Is $|\mathbb{R}|$ gelijk aan $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}|$? Motiveer je antwoord (zoals altijd).

EINDE TENTAMEN - ENGELSE VERTALING HIERONDER

THE ENGLISH EXAM FOLLOWS BELOW

Z.O.Z. / P.T.O.

Exam "Wat is Wiskunde" (WISB101)
Thursday, January 3, 2019, 9:00 - 12:00

Instructors: *Carel Faber & Gil Cavalcanti & Barbara van den Berg & Harry Smit & Guido Terra-Bleeker & Johan van de Leur*

- USE A SEPARATE SHEET OF PAPER FOR EACH EXERCISE. The exam consists of six exercises, each worth 10 points.
- Write your name and student number on each sheet of paper.
- The use of phones, computers, calculators, books or notes is not allowed.
- Do not only give answers, but for each (sub)exercise show clearly how you obtain your answer and prove all your claims.
- Even if you don't succeed in proving part of an exercise, you may use the result in the remainder of the exercise.

Exercise 1 (new sheet of paper)

(a). (*5 points*) Let P, Q, and R be statements. Determine for which truth values of P, Q, and R the compound statement

$$P \vee ((Q \Rightarrow R) \wedge (P \Rightarrow (Q \wedge R)))$$

is true.

(b). (*5 points*) Let A, B, and C be sets. Prove that

$$A - (B \cup C) \subseteq (A - B) \cup C.$$

Prove also that $A - (B \cup C) = (A - B) \cup C$ if and only if $C = \emptyset$.

Exercise 2 (new sheet of paper)

(a). (*7 points*) The sequence $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is defined recursively by $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, and

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0.$$

Using the strong principle of mathematical induction, prove that

$$a_n = (5 - n)2^{n-2}$$

holds for all $n \in \mathbb{N}$.

(b). (*3 points*) Prove that $5|a_n$ holds if and only if $5|n$.

Exercise 3 (new sheet of paper)

(a). (*3 points*) Let $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be given by $g(x) = x^2 + 1$. Prove that g is not surjective.

(b). (*4 points*) Let $f\colon X \to Y$ and $g\colon Y \to Z$ be functions. Prove: if g is not surjective, then $g \circ f$ is not surjective either.

(c). (*3 points*) Let $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be given by $h(x) = e^{2x} - 2e^{-x} + e^{-4x} + 1$. Prove that h is not surjective. Hint: Use (a) and (b).

Exercise 4 (new sheet of paper)

(*10 points*) Give an ϵ-δ-proof that

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-1} = 1.$$

Exercise 5 (new sheet of paper)

In this exercise n and k are integers with $n \geq 2$ and $k \geq 1$. Further, there are k positive integers $a_1, a_2, \ldots, a_k$ that all are congruent with -1 modulo n:

$$a_i \equiv -1 \pmod{n} \qquad (1 \leq i \leq k).$$

The sum of these k integers we denote with S:

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_k = \sum_{i=1}^{k} a_i \,.$$

This exercise concerns the question whether we can determine k if we know a number of things about S.

(a). (*2 points*) Show that each of the k integers is at least equal to $n-1$:

$$a_i \geq n-1 \qquad (1 \leq i \leq k).$$

(b). (*2 points*) Let r be the remainder of S under division by n with remainder, so $S \equiv r \pmod{n}$ and $0 \leq r \leq n-1$. Prove that $k \equiv n - r \pmod{n}$.

(c). (*2 points*) Prove that $S \geq (n-r)(n-1)$.

(d). (*2 points*) Prove that k is uniquely determined if $S < (2n-r)(n-1)$. What is k in that case?

(e). (*2 points*) The prices of all articles in a certain shop end in 99 cents, e.g., 0.99, 1.99, 3.99, etc. A customer buys a number of articles and pays a total amount of 38.87. How many articles did the customer buy? Motivate your answer (as always).

Exercise 6 (new sheet of paper)

Let X be a nonempty set. We define $\mathcal{P}^*(X)$ as the set of the *nonempty* subsets of X.

(a). (*4 points*) When A and B are nonempty subsets of X, then $A \times B$ is a nonempty subset of $X \times X$. Prove that

$$f\colon \mathcal{P}^*(X) \times \mathcal{P}^*(X) \to \mathcal{P}^*(X \times X), \qquad (A, B) \mapsto A \times B$$

is an *injective* function.

(b). (*3 points*) It is given that $|\mathcal{P}^*(\mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. Prove that $|\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

(c). (*3 points*) Is $|\mathbb{R}|$ equal to $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}|$? Motivate your answer (as always).