Universiteit Utrecht 35 pt Boedapestlaan 6
Mathematisch Instituut 3584 CD Utrecht

Hertentamen Kansrekening 2011/2012

* Zet op elk blaadje dat je inlevert je naam en collegekaartnummer. Zet op het eerste blad ook de naam van je werkcollegebegeleider.

* Als je een onderdeel niet kan oplossen, ga verder met het volgende. Je mag gerust gebruik maken van wat er in de tekst van een onopgelost onderdeel staat. Geef niet alleen antwoorden, maar laat de hele redenering zien die tot het antwoord leidt.

* Punten per opgave:

opgave:	1	2	3	4	5
punten:	20	20	20	20	20

1. Een hoed bevat n munten waarvan f zuiver zijn (dus $P(\text{Kop}) = 1/2$) en b onzuiver zijn met $P(\text{Kop}) = 2/3$. Kies geheel willekeurig een munt uit de hoed en werp de gekozen munt twee keer.

   (a) Wat is de kans de we met deze gekozen munt twee keer kop krijgen?

   (b) Gegeven dat we twee keer kop gekregen hebben, wat is de kans dat de gekozen munt onzuiver is?

2. Zij U_1 en U_2 onafhankelijk uniform verdeeld zijn op $[0, 1]$. Definieer

$$X = \min(U_1, U_2) \quad \text{en} \quad Y = \max(U_1, U_2).$$

   (a) Bepaal de cumulatieve verdelingsfunctie $F_X(x)$, de kansdichtheid $f_X(x)$, en de verwachting $E(X)$ van X.

   (c) Bepaal $P(X \leq x, Y \leq y, U_1 \leq U_2)$ voor $x, y \in [0, 1]$.

3. Stel dat de simultane kansdichtheid van X en Y gegeven wordt door

$$f(x, y) = \begin{cases} \lambda^3 x e^{-\lambda y} & \text{als } 0 < x < y \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

   (a) Bepaal de kansdichtheid $f_Y(y)$ van Y.

   (b) Bepaal de verwachting $E(Y)$ van Y.

   (c) Laat zien dat voor $y > 0$, de conditionele kansdichtheid van X gegeven $Y = y$ gegeven wordt door

$$f_X(x|Y = y) = \begin{cases} \frac{2x}{y^2} & \text{als } 0 < x < y \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

(c) Zij $y > 0$. Bereken $E(X|Y = y)$ en laat zien dat $E(X) = 2/\lambda$.

4. Zij $X_1, X_2, \dots,$ een rij van onafhankelijke stochasten met X_n standaard normaal verdeeld (d.w.z. $f_{X_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$).

   (a) Laat zien dat $E(X_n^2) = 1$, en $E(X_n^4) = 3$. Concludeer dat $\mathrm{Var}(X_i^2) = 2$.

   (b) Geef een schatting van $P(\sum_{n=1}^{100} X_n^2 > 110)$ met behulp van de Centrale Limiet Stelling.

   (c) Laat zien met behulp van Chebyshev's ongelijkheid dat

$$P(\sum_{n=1}^{100} X_n^2 > t) \leq \frac{200}{(t-100)^2}.$$

5. Zij $N, X_1, X_2, X_3, \cdots$ een rij van onafhankelijke stochasten met N Poisson verdeeld met parameter $\mu > 0$ en X_i exponentieel verdeeld is met parameter $\lambda > 0$ voor $i \geq 1$. Definieer

$$Y = \begin{cases} \max(X_1, X_2, \dots, X_n) & \text{als } N = n,\ n \geq 1 \\ 0 & \text{als } N = 0. \end{cases}$$

en

$$S = \begin{cases} X_1 + X_2 + \cdots + X_n & \text{als } N = n,\ n \geq 1 \\ 0 & \text{als } N = 0. \end{cases}$$

   (a) Laat zien dat $P(Y \leq t|N = n) = (1 - e^{-\lambda t})^n$ voor $t > 0$.

   (b) Bepaal $P(Y \leq t)$ voor $t > 0$.

   (c) Bepaal $P(S = 0)$.

   (d) Bepaal $E(S \,|\, N = n)$ voor $n \geq 0$. Bereken vervolgens $E(S)$.