Universiteit Utrecht 35 pt Boedapestlaan 6
Mathematisch Instituut 3584 CD Utrecht

Deeltentamen 1 Kansrekening 2011

* Zet op elk blaadje dat je inlevert je naam en collegekaartnummer. Zet op het eerste blad ook de naam van je werkcollegebegeleider.

* Als je een onderdeel niet kan oplossen, ga verder met het volgende. Je mag gerust gebruik maken van wat er in de tekst van een onopgelost onderdeel staat. Geef niet alleen antwoorden, maar laat de hele redenering zien die tot het antwoord leidt.

* Punten per opgave:

opgave:	1	2	3	4	5
punten:	20	20	25	25	10

1. Gegeven twee dozen. Doos 1 bevat 5 witte en 7 zwarte ballen, en doos 2 bevat 3 witte ballen en 12 zwarte. Werp met een zuivere munt. Als KOP bovenkomt trek je geheel willekeurig een bal uit doos 1, die je daarna in doos 2 legt. Als MUNT bovenkomt trek je geheel willekeurig een bal uit doos 2, die je daarna in doos 1 legt. Vervolgens, en in allebei gevallen, trek je een bal uit doos 2.

   (a) Bepaal de kans dat de eerste getrokken bal wit is.

   (b) Stel dat de eerste getrokken bal wit is, wat is dan de kans dat deze bal uit doos 1 getrokken was?

   (c) Stel dat de eerste getrokken bal uit doos 1 getrokken was. Wat is dan de kans dat de tweede getrokken bal wit is?

2. Om onduidelijke redenen onderhoudt *Doomsday Airlines* dagelijkse vluchten van Amsterdam naar Utrecht. Men heeft twee vluchten in de aanbieding, met een twee-motorig en met een vier-motorig vliegtuig. Stel dat elke motor van ieder vliegtuig onafhankelijk van de andere motoren uitvalt met kans $1 - p$, en dat beide vliegtuigen hun bestemming kunnen bereiken als tenminste de helft van de motoren blijft draaien.

   (a) Bereken voor beide vliegtuigen de kans dat deze neerstort.

   (b) Aannemende dat u wilt blijven leven, voor welke waarden van p prefereert u het twee-motorig toestel?

   (c) Stel nu dat we een $2n$-motorig vliegtuig hebben, en dat elke motor onafhankelijk van de andere motoren uitvalt met kans $1 - p$. Wat is de kans dat tenminste de helft van de motoren blijft draaien?

3. Stel dat X en Y stochastische variabelen zijn met simultane verdeling

$$P(X=n, Y=m) = cr^{n+m},$$

voor $c > 0$, $0 < r < 1$, $n, m = 1, 2, 3, \cdots$.

(a) Laat zien dat $c = \left(\frac{1}{r} - 1\right)^2$.

(b) Laat zien dat X en Y onafhankelijk geometrisch verdeeld zijn met parameter $p = 1 - r$.

(c) Laat zien dat $\mathrm{Var}(X - Y) = \frac{2r}{(1-r)^2}$.

(d) Bepaal $P(\max(X, Y) \leq n)$, $n = 1, 2, \cdots$.

4. We beschikken k ballen en n dozen. We gooien ieder bal met uniform kans en onafhankelijk van alle andere ballen in een van de dozen. Definieer voor $i = 1, \cdots, n$,

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{als doos } i \text{ leeg is,} \\ 0 & \text{elders,} \end{cases}$$

en laat X het aantal lege dozen zijn.

(a) Bepaal de verdeling van X_i, $i = 1, \cdots, n$.

(b) Bepaal de conditionele kans $P(X_2 = 1 | X_1 = 1)$. Zijn $X_1, X_2, \cdots, X_{n-1}$ onafhankelijk?

(c) Laat zien dat $E(X) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$.

(d) Laat zien dat $E(X^2) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k + n(n-1)\left(1 - \frac{2}{n}\right)^k$.

5. Laat $X_1, X_2, \cdots$, onafhankelijke en identiek verdeelde stochasten zijn, met eindige variantie σ^2 en negatieve verwachting μ. Voor $n \geq 1$, laat $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Gebruik de ongelijkheid van Chebyshev om te laten zien dat voor iedere constante $c \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \to \infty} P(S_n \geq c) = 0.$$