Universiteit Utrecht — Universiteit Utrecht — Boedapestlaan 6

Mathematisch Instituut — 3584 CD Utrecht

Deeltentamen 1 Kansrekening 2012

* **Schrijf de uitwerkingen van de verschillende opgaven op aparte tentamenpapier.**
* Zet op elk blaadje dat je inlevert je naam en collegekaartnummer. Zet op het eerste blad ook de naam van je werkcollegebegeleider.
* Als je een onderdeel niet kan oplossen, ga dan verder met het volgende. Je mag gerust gebruik maken van wat er in de tekst van een onopgelost onderdeel staat. Geef niet alleen antwoorden, maar laat de hele redenering zien die tot het antwoord leidt.
* Punten per opgave:

opgave:	1	2	3	4	5	6
punten:	15	15	15	15	20	20

1. We werpen N zuivere dobbelstenen. Hierbij is N een stochastische variabele met $P(N = n) = 2^{-n}$ voor $n \geq 1$. Zij S het aantal geworpen ogen.
   (a) Bepaal $P(S = 4 \mid N = 2)$.
   (b) Bepaal $P(S = 4)$.
   (c) Bepaal $P(N = 2 \mid S = 4)$.
   (d) Bepaal $P(N = 2, S = 4)$.

2. Zij A en B onafhankelijke gebeurtenissen met $P(A) = \frac{1}{4}$ en $P(B) = \frac{1}{3}$. Zij $X = I_A$ en $Y = I_B$ de indicatorfuncties van respectievelijk A en B.
   (a) Bepaal de simultane verdeling van de stochasten $X + Y$ en $X - Y$.
   (b) Bepaal de (marginale) verdeling van $X + Y$.
   (c) Bepaal $\mathrm{SD}(X - Y)$, de standaarddeviatie van de stochast $X - Y$.

3. Zij $0 < p < 1$ en zij X en Y stochastische variabelen met simultane verdeling
$$P(X = k, Y = \ell) = \frac{2\ell p(1-p)^{k-1}}{k(k+1)},$$
voor $k = 1, 2, \cdots$ en $\ell = 1, 2, \cdots, k$.
   (a) Laat zien dat X geometrisch verdeeld is met parameter p.
   (b) Laat zien dat $E\left(\dfrac{X^2(X+1)}{Y}\right) = 2E(X^2) = \dfrac{4-2p}{p^2}$.

4. Zij $X_1, X_2, \cdots$ onafhankelijke Poisson verdeelde stochasten met parameter $\mu > 0$.

   (a) Bepaal $P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \geq 1)$.

   (b) Bepaal $P(X_1 = \ell \,|\, X_1 + X_2 = k)$ voor $k = 0, 1, 2, \cdots$ en $\ell = 0, \cdots, k$.

   (c) Bepaal $E\left((X_7 + X_8)^2\right)$.

5. Zij $n_1, n_2, \cdots, n_m \geq 0$ gehele getallen en $0 < p < 1$.

   (a) Zij $X_1, X_2, \cdots, X_m$ onafhankelijke binomiaal verdeelde stochasten met respectievelijk parameters $(n_1, p), (n_2, p), \cdots, (n_m, p)$. Laat zien dat de stochast $X_1 + X_2 + \cdots + X_m$ binomiaal verdeeld is met parameters $(n_1 + n_2, \cdots + n_m, p)$.

   (b) Beschouw de stochast X_1 van onderdeel (a) met $n_1 = 123$ en $p = \frac{9}{10}$. Voor welke waarde van $k \in \{0, 1, \cdots, 123\}$ is $P(X_1 = k) = \max_{0 \leq j \leq 123} P(X_1 = j)$?

   (c) Beschouw de stochast X_2 van onderdeel (a) met $n_2 = 100$ en $p = \frac{1}{10}$. Gegeven is de numerieke waarde $P(X_2 = 4) = 0{,}01587$. Druk $P(X_2 = 7)$ uit in termen van $P(X_2 = 4)$ en bepaal de numerieke waarde van $P(X_2 = 7)$.

6. Zij $X_1, X_2, \cdots$ onafhankelijke Bernoulli verdeelde stochasten met parameter $0 < p < 1$. Definieer, voor $n \geq 1$, de stochast Y_n als

$$Y_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

   (a) Bepaal $P\left(Y_n = \dfrac{k}{n}\right)$ voor $k = 0, 1, \cdots, n$.

   (b) Laat zien dat $\lim_{n \to \infty} P(X_1 + \cdots + X_n < 2pn) = 1$.

   (c) Laat zien dat $P(|Y_n - p| \geq p) \leq \dfrac{1-p}{np}$.