Ringen en Galoistheorie

1 juli 2014, 13:30-16:30

Bij dit tentamen mag het dictaat niet gebruikt worden.
Laat bij elke opgave zien hoe je aan je antwoord komt!!
Veel succes!

1. Stel $P(X) = X^4 + 6X^2 - 4X + 6$.
   (a) (1/2 pt) Ontbind $P(X)$ in irreducibele factoren in $\mathbb{Q}[X]$.
   (b) (1/2 pt) Ontbind $P(X)$ in irreducibele factoren in $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$.
   (c) (1/2 pt) Bewijs dat het polynoom $X^n + Y^n - 1$ irreducibel is in $\mathbb{C}[X, Y]$ voor elke $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.
   (d) (1/2 pt) Bewijs dat $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]/(X^3 - X + 1)$ isomorf is met $\mathbb{F}_{27}$, het lichaam met 27 elementen.

2. Zij K een lichaam en $K[X, Y]$ de polynoomring in X en Y. Beschouw de volgende idealen:

$$\begin{aligned} I &= \{P \in K[X,Y] | P(0,0) = 0\} \\ J &= \{P \in K[X,Y] | P(1,1) = 0\} \\ M &= \{P \in K[X,Y] | P(0,0) = P(1,1) = 0\} \end{aligned}$$

   (a) (1/2 pt) Bewijs dat J een maximaal ideaal is.
   (b) (1/2 pt) Bewijs dat M geen priemideaal is.
   (c) (1 pt) Bewijs dat $I + J = K[X, Y]$.
   (d) (1/2 pt) Bewijs dat $M = I \cdot J$ (product van I en J) (Je mag de Chinese reststelling gebruiken).
   (e) (1/2 pt) Bewijs dat $P(X, Y) \in J \cdot J$ dan en slechts dan als zowel P als zijn partiele afgeleiden nul zijn in het punt $(1, 1)$.

3. Zij R een niet-triviale ring en stel dat voor elk element $x \in R$ met $x \neq 1$ een natuurlijk getal $n > 1$ bestaat zó dat $x^n = 0$. We laten zien dat R isomorf is met $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Hiertoe nemen we eerst aan dat er een element $a \in R$ bestaat met $a \neq 0, 1$.
   (a) (1/2 pt) Bewijs dat a een nuldeler is.
   (b) (1/2 pt) Bewijs dat a een éénheid is (hint: stel $(1 + a)^m = 0$ en werk dit uit).
   (c) (1/2 pt) Bewijs dat a niet zowel nuldeler als éénheid kan zijn.
   (d) (1/2 pt) Bewijs dat $R \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Z.O.Z.

4. Gegeven is het irreducibele polynoom $f = X^4 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$.

   (a) (1/2 pt) Bepaal het splijtlichaam L van f over $\mathbb{Q}$.

   (b) (1/2 pt) Bewijs dat $[L : \mathbb{Q}] = 8$.

   (c) (1 pt) Bepaal $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ en de ondergroepen ervan.

   (d) (1 pt) Bepaal alle lichamen M met $\mathbb{Q} \subset M \subset L$ en $[M : \mathbb{Q}] = 2$.