Eerste deeltentamen Functies en Reeksen

8 november 2012, 9:00 - 12:00 uur

- Schrijf op ieder vel **je naam** en bovendien op het eerste vel je **studentnummer**, de naam van je **practicumleider** (Arjen Baarsma, Joao Mestre) en het **aantal ingeleverde vellen**.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Rekenmachine, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.
- Alle 5 opgaven tellen even zwaar.

Succes !

Opgave 1 We definiëren de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ door

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^4} \qquad ((x, y) \neq (0, 0))$$

en door $f(0, 0) = 0$.

(a) Zij $v \in \mathbb{R}^2$. Toon aan dat de functie f in het punt $(0, 0)$ richtingsdifferentieerbaar is in de richting v, en bepaal de richtingsafgeleide $D_v f(0, 0)$.

(b) Toon aan dat de functie f niet totaal differentieerbaar is in $(0, 0)$.

Opgave 2 Gegeven is een functie $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die totaal differentieerbaar is in $(0, 0)$. We definiëren de functie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ door

$$f(x, y, z) = b(x^2 + yz, 1 + xy - z^2).$$

(a) Bewijs dat f totaal differentieerbaar is in $(0, 0, 1)$.

(b) Druk $Df(0, 0, 1)$ uit in termen van de partiële afgeleiden van b in $(0, 0)$.

ZOZ

Opgave 3 Laat functie $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een functie met $g(0) = 0$ zijn, die totaal differentieerbaar is in 0. Laat voorts $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continu zijn in 0.

(a) Toon aan dat

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|(f(h) - f(0))\, Dg(0)(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

(b) Bewijs dat de functie $\varphi : x \mapsto f(x)g(x)$ totaal differentieerbaar is in 0, met afgeleide

$$D\varphi(0) = f(0)Dg(0).$$

Opgave 4 We beschouwen de functie $f :]0, \infty[\times [0, \infty[\to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x, t) = e^{-xt}\sqrt{t + 1}.$$

(a) Toon aan dat de functie $t \mapsto f(x, t)$ oneigenlijk Riemann-integreerbaar is over $[0, \infty[$, voor iedere $x > 0$.

(b) Toon aan dat de functie $F :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, gedefinieerd door

$$F(x) := \int_0^\infty e^{-xt}\sqrt{t + 1}\, dt,$$

differentieerbaar is.

Opgave 5 Zij $f : [0, 1] \times [0, \infty[\to \mathbb{R}$ een continue functie zo dat $|f(x, y)| \leq (1 + y)^{-2}$ voor alle $0 \leq x \leq 1$ en $y \geq 0$.

(a) Toon aan dat door

$$F(x) = \int_0^\infty f(x, y)\, dy$$

een continue functie $[0, 1] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd wordt.

Voor ieder geheel getal $n \geq 1$ definiëren we de functie $F_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ door

$$F_n(x) = \int_0^n f(x, y)\, dy.$$

(b) Bewijs dat de rij $(F_n)_{n \geq 1}$ uniform convergeert op $[0, 1]$ met limietfunctie F.

(c) **Bonusopgave:** hiermee kunnen extra punten verdiend worden.

Bewijs dat

$$\int_0^1 \int_0^\infty f(x, y)\, dy\, dx = \int_0^\infty \int_0^1 f(x, y)\, dx\, dy.$$