

Tentamen Functies en Reeksen

7 november 2013, 13:30 - 16:30 uur

- Schrijf op ieder vel je naam en bovendien op het eerste vel je studentnummer, de naam van je practicumleider (Joey van der Leer, Ka Yin Leung, Shan Shah) en het aantal ingeleverde vellen.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen**. Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschaft informatie gebruiken.
- Rekenmachine, telefoon, computer, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.
- Alle 4 opgaven tellen even zwaar, elk voor 10 punten. Bij de laatste opgave zijn in een laatste onderdeel nog 4 extra punten te verdienen.

Succes !

Opgave 1 We beschouwen de functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(0, 0) = 0$ en

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad ((x, y) \neq (0, 0)).$$

- 2 pt (a) Bewijs dat f op de open verzameling $V := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ totaal differentieerbaar is en bepaal voor $(x, y) \in V$ de totale afgeleide $Df(x, y)$.
- 3 pt (b) Bewijs dat f in $(0, 0)$ richtingsdifferentieerbaar is en bepaal voor elke $v \in \mathbb{R}^2$ de richtingsafgeleide $D_v f(0, 0)$.
- 2 pt (c) Toon aan dat f in $(0, 0)$ partieel differentieerbaar is en bepaal de partiële afgeleiden van f in $(0, 0)$.
- 3 pt (d) Is de functie f in $(0, 0)$ totaal differentieerbaar? Motiveer uw antwoord.

Opgave 2 We beschouwen een rij continue functies $f_n : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$, ($n \geq 0$), en een functie $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$. Gegeven is dat $|f_n(x)| \leq 1$ voor alle $n \geq 0$ en $x \in [0, \infty[$. Gegeven is verder dat $f_n \rightarrow f$ uniform op $[0, R]$ voor $n \rightarrow \infty$, voor alle $R > 0$.

- 1 pt (a) Bewijs dat $|f(x)| \leq 1$ voor alle $x \in [0, \infty[$.
- 2 pt (b) Bewijs dat f continu is op $[0, \infty[$.
- 2 pt (c) Bewijs dat voor iedere $R > 0$ geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-t} f_n(t) dt = \int_0^R e^{-t} f(t) dt.$$

ZOZ

2 pt (d) Bewijs dat de oneigenlijke integralen $\int_0^\infty e^{-t} f_n(t) dt$ en $\int_0^\infty e^{-t} f(t) dt$ convergeren.

3 pt (e) Bewijs dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-t} f_n(t) dt = \int_0^\infty e^{-t} f(t) dt.$$

(je mag niet volstaan met een bekend resultaat te citeren).

Opgave 3 Voor $0 < a < 1$ beschouwen we de 2π -periodieke functie $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ die op $]-\pi, \pi]$ gedefinieerd is door

$$f_a(x) = e^{iax}, \quad (-\pi < x \leq \pi).$$

3 pt (a) Bepaal $(\mathcal{F} f_a)_k$ voor elke $k \in \mathbb{Z}$.

3 pt (b) Bewijs dat voor elke $0 < a < 1$ de volgende formule geldt:

$$\left(\frac{\pi}{\sin a\pi}\right)^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k-a)^2}$$

4 pt (c) Zij $0 < \delta < 1/2$. Bewijs dat de reeks in (b) uniform in de variabele a convergeert voor $a \in [\delta, 1 - \delta]$.

Opgave 4

1 pt (a) Toon aan dat de machtreeks $\sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} k^{-1} z^k$ convergentiestraal 1 heeft.

2 pt (b) Zij $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Toon aan dat de functie $h : D \rightarrow \mathbb{C}$ gedefinieerd door

$$h(z) := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k}$$

complex differentieerbaar is met afgeleide $h'(z) = (1+z)^{-1}$.

2 pt (c) Toon aan dat voor alle $z \in D$ geldt $e^{-h(z)}(1+z) = 1$.

3 pt (d) Bewijs dat $\lim_{z \rightarrow 0} z^{-1} h(z) = 1$ en tevens dat voor iedere $z \in \mathbb{C}$ geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n h\left(\frac{z}{n}\right) = z.$$

2 pt (e) Bewijs dat voor iedere $z \in \mathbb{C}$ geldt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z.$$

4 pt (f) **Deze vraag valt strikt genomen buiten het tentamen. Er zijn 4 extra punten mee te verdienen:** Toon aan voor elke $R > 0$ de convergentie in (e) uniform is voor z in de verzameling $V = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$.