

Herkansingtentamen Functies en Reeksen

3 januari 2014, 9:00 - 12:00 uur

- Schrijf op ieder vel **je naam** en bovendien op het eerste vel je **studentnummer**, de naam van je **practicumleider** (Joey van der Leer, KaYin Leung, Shan Shah) en het **aantal ingeleverde vellen**.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen**. Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschaft informatie gebruiken.
- Rekenmachine, telefoon, computer, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.
- Alle 5 opgaven tellen even zwaar, elk voor 10 punten.

Succes !

Opgave 1 In het onderstaande is $v \in \mathbb{R}$ een constante. We beschouwen de functie $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door

$$\varphi(x, y) = (x - vy, x + vy).$$

- 3 pt (a) Beargumenteer dat φ totaal differentieerbaar is en bepaal de totale afgeleide $D\varphi(x, y)$ voor alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

We beschouwen een C^2 -functie $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ en definiëren de functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ door $f(x, y) = F(\varphi(x, y))$.

- 4 pt (b) Beargumenteer dat de functie f totaal differentieerbaar is en geef een formule die de partiële afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ en $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ uitdrukt in de partiële afgeleiden $D_1 F(\varphi(x, y))$ en $D_2 F(\varphi(x, y))$.

- 3 pt (c) Bewijs dat voor alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ geldt dat:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = v[D_2^2 F(\varphi(x, y)) - D_1^2 F(\varphi(x, y))].$$

Opgave 2

- 5 pt (a) Bewijs dat de integraal $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}(1+t^2)} dt$ convergent is.

Op soortgelijke wijze kan men bewijzen dat de integraal $\int_0^\infty \frac{\sqrt{t}}{1+t^2} dt$ convergent is. Je mag dit in het vervolg gebruiken.

We beschouwen voor $x \in \mathbb{R}$ de integraal

$$f(x) := \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{\sqrt{t}(1+t^2)} dt.$$

ZOZ

- 2 pt (b) Toon aan dat de bovenstaande integraal voor alle $x \in \mathbb{R}$ convergent is en een continue functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definieert.
- 3 pt (c) Toon aan dat f differentieerbaar is op \mathbb{R} en bepaal $f'(0)$.

Opgave 3 We beschouwen de ruimte \mathcal{B} van begrensde functies $[0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, voorzien van de sup-norm $\| \cdot \|_{[0, \infty[}$.

- 3 pt (a) Laat zien dat voor alle $f, g \in \mathcal{B}$ en elke $x \geq 0$ geldt:

$$|f(x)| \leq |g(x)| + \|f - g\|_{[0, \infty[}.$$

- 4 pt (b) Laat $(f_n)_{n \geq 0}$ een convergente rij in \mathcal{B} zijn met limietfunctie f . Veronderstel dat voor iedere $n \in \mathbb{N}$ geldt $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. Toon aan dat $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

We beschouwen de deelruimte \mathcal{B}_0 van functies $f \in \mathcal{B}$ die voldoen aan $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Voorzien van de uniforme afstand $d : (f, g) \mapsto \|f - g\|_{[0, \infty[}$ is \mathcal{B}_0 een metrische ruimte.

- 3 pt (c) Bewijs dat de metrische ruimte (\mathcal{B}_0, d) volledig is.

Opgave 4 Bepaal de convergentiestralen van de volgende machtreeksen:

3 pt (a) $\sum_{k=1}^{\infty} k(z - i)^k,$

3 pt (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2 + 2^k},$

4 pt (c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{k+2}.$

Opgave 5 Voor $0 \leq a < 1$ beschouwen we de 2π -periodieke functie $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ die op $[-\pi, \pi]$ gedefinieerd is door

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } |x| \leq a\pi, \\ 0 & \text{als } a\pi < |x| \leq \pi. \end{cases}$$

- 3 pt (a) Bepaal de complexe Fourier coëfficiënt $c_k = (\mathcal{F}f_a)_k$ voor elke $k \in \mathbb{Z}$.
- 2 pt (b) Beargumenteer dat de limiet

$$L(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

bestaat voor alle $x \in \mathbb{R}$. In welke punten is de functie L continu? Geef de waarden van L in de discontinuïteitspunten.

- 3 pt (c) Bewijs dat voor alle $0 \leq a < 1$ geldt dat

$$\frac{a(1-a)}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin k a \pi}{k \pi} \right)^2.$$

- 2 pt (d) Bewijs dat de in (c) gevonden reeks uniform convergent is in de variabele $a \in \mathbb{R}$. We noemen de som van de reeks $S(a)$. Geef een expliciete beschrijving van de functie $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.