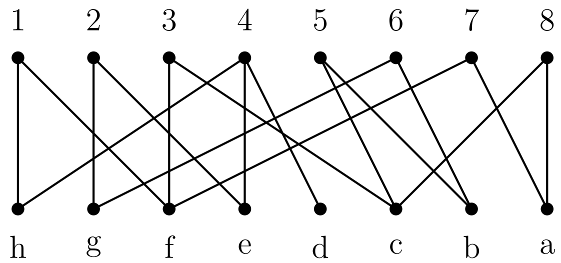
Discrete modellen in de toegepaste wiskunde (WISB136). Uitwerkingen van het hertentamen.

Docent: Rob H. Bisseling, Universiteit Utrecht

23 mei 2013. Tijd 13.30 - 16.30 uur.

Elke vraag is 10 punten waard. Totaal aantal te behalen punten is 50. Tijd 180 minuten. Je mag geen rekenmachine, boeken, of aantekeningen gebruiken. Motiveer je antwoorden. Veel succes!

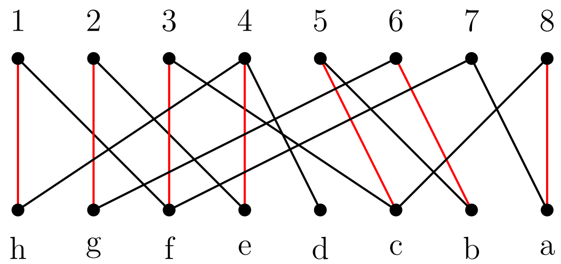
1. (a) Dit probleem kan geformuleerd worden als het vinden van een maximummatching in een bipartiete graaf $G[X,Y]$, met $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ de verzameling rijen en $Y = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ de verzameling kolommen, en met de zijden gegeven door de velden waar een toren mag staan. De bipartiete graaf ziet er zo uit:



Voor het gemak hebben we de knopen a t/m h van rechts naar links getekend, want dit levert kortere lijnen op.

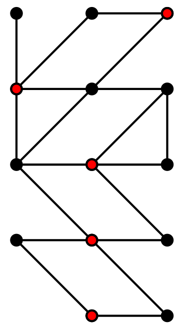
Twee torens die elkaar kunnen slaan, staan in dezelfde rij of kolom, en geven dus twee zijden horend bij eenzelfde knoop. Dit mag niet. We zoeken daarom een matching. We willen een zo groot mogelijk aantal zijden, en dus een maximummatching.

(b) Dit kan opgelost worden met het Hongaarse algoritme dat APS-bomen maakt, met hopelijk augmenterende paden. Er kunnen meerdere goede oplossingen zijn. Begin met een matching M. Makkelijk is de vijf velden behorend bij verticaal getekende zijden te nemen als start. We zien meteen dat we er ook $c5$ en $b6$ aan toe kunnen voegen: $M = \{a8, b6, c5, e4, f3, g2, h1\}$. De gematchte zijden zijn in rood aangegeven.

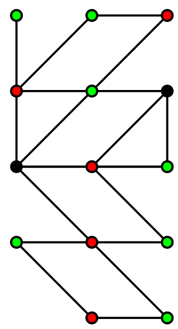


We zoeken nu een augmenterend pad: $7a8c5b6g2e4d$. Als we de vijf gematchte zijden $a8, c5, b6, g2, e4$ vervangen door zes nieuwe matches $7a, 8c, 5b, 6g, 2e, 4d$ krijgen we de matching $M = \{a7, b5, c8, d4, e2, f3, g6, h1\}$. Dit is een perfecte matching, en correspondeert met acht torens op het schaakbord.

2. (a) Geef de knopen een naam, a t/m n: de bovenste rij is a, b, c; de tweede rij is d, e, f; en de laatste rij is m, n. Een mogelijke volgorde is: d, e, g, h, k met graad 4, f met graad 3, b, c, i, j, l, m, n met graad 2, en a met graad 1. De eerste kleur (rood) geeft:



De tweede kleur (groen) geeft:



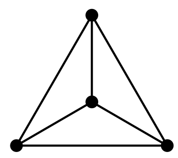
We kunnen de laatste twee knopen zwart kleuren, en dit geeft het eindresultaat. Het aantal gebruikte kleuren is drie. Dit is minimaal, omdat de driehoek deg niet met minder dan drie kleuren gekleurd kan worden.

(b) Stel de graaf $G = (V, E)$ is 2-kleurbaar. Kleur de knopen met twee kleuren, zeg rood en groen. Stel $X \subset V$ is de verzameling rode knopen, en Y de verzameling groene knopen. Dan is $X \cap Y = \emptyset$, $X \cup Y = V$, en alle zijden zijn van de vorm (x, y) met $x \in X$ en $y \in Y$. Immers, twee knopen in X kunnen niet met elkaar verbonden zijn, want ze zijn beiden rood. Idem voor Y. Dus de graaf is bipartiet.

Stel de graaf is bipartiet, $G = G[X, Y]$. Kleur de knopen van X rood, en die van Y groen. Dit is een kleuring met 2 kleuren. Immers, stel e is een zijde uit E, dan is deze te schrijven als $e = (x, y)$ met $x \in X$ en $y \in Y$. Dus hebben de twee knopen van de zijde verschillende kleuren.

3. (a) Volgens de formule van Euler voor planaire samenhangende grafen is $n - m + f = 2$, dus $f = m - n + 2$.

(b) K_4 kan als volgt planair ingebed worden:



K_4 is samenhangend, want elk paar knopen is verbonden door een pad, en zelfs een pad van lengte 1. De formule van Euler geldt dus. Er zijn 4 gebieden, waarvan 1 buitengebied. Omdat $n = 4, m = 6, f = 4$, is inderdaad $f = m - n + 2$.

(c) Stel $m \geq 3$. Neem aan dat de graaf G planair ingebed is. Elk gebied (*face*), ook het buitengebied, wordt begrensd door een cykel bestaande uit minstens 3 zijden. Het totaal aantal zijden van deze begrenzingen is dus $T \geq 3f$. Elke zijde kan slechts aan 2 begrenzingen deelnemen, dus $2m \geq T \geq 3f = 3(m - n + 2)$, zodat we na vereenvoudiging $m \leq 3n - 6$ krijgen.

(d) K_5 is samenhangend en simpel, en heeft 5 knopen en $5 \cdot 4/2 = 10$ zijden, dus $m = 10$ en $3n - 6 = 9$. Er geldt $m > 3n - 6$. K_5 kan dus niet planair zijn volgens (c).

4. (a) Een Eulerse graaf is een graaf $G = (V, E)$ waarvoor een Eulertoer bestaat, d.w.z. een pad $v_1 v_2 \cdots v_r$ met $v_r = v_1$, $r \geq 1$, en $v_i v_{i+1} \in E$ voor $i = 1, \ldots, r - 1$, waarbij elke zijde in de graaf precies éénmaal doorlopen wordt.

(b) Alle knopen van de rechtergraaf hebben een even graad en de graaf is samenhangend, dus er is een Eulertoer. Als we de knopen op de eerste (bovenste) rij 1, 2, 3 nummeren, die op de volgende rij 4, 5, 6, enz., en die op de laatste rij 10, 11, 12, dan is een Eulertoer: 2, 3, 8, 1, 2, 6, 9, 12, 11, 10, 7, 4, 8, 6, 5, 4, 2.

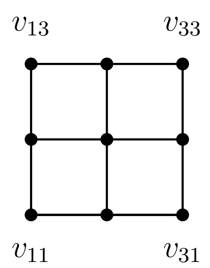
De linkergraaf heeft knopen met oneven graad (onder andere de eerste en de laatste knoop van de middelste rij), dus er bestaat geen Eulertoer.

5. (a) Het Breadth-First Search algoritme om een BFS-boom te maken voor een graaf $G = (V, E)$ en een gegeven wortel $r \in V$ is:

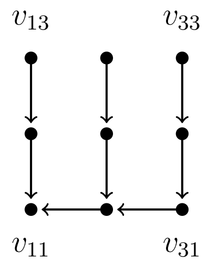
$Q \leftarrow \{r\}$;
for all $v \in V$ **do**
  $colour(v) = \text{white}$;
while $Q \neq \emptyset$ **do**
  $x \leftarrow head(Q)$;
  if $\exists y \in N(x)$ with $colour(y) = \text{white}$ **then**
    $colour(y) = \text{black}$;
    $parent(y) = x$;
    $Q \leftarrow Q \cup \{y\}$; $tail(Q) = y$;
  else
    $Q \leftarrow Q \backslash \{x\}$;

Hierbij is Q een queue (werkt volgens first-in, first out) met een kop (*head*) en een staart (*tail*). Een knoop is zwart als hij aan de boom toegevoegd is. De burenverzameling van x is $N(x)$. De boom wordt beschreven door de *parent*-relatie: voor iedere knoop in de boom wordt de ouder genoteerd.

(b) Een tekening van de graaf G_3:



(c) Als we telkens de buurknoop met de laagste y-coordinaat als eerste kiezen, krijgen we de volgende BFS-boom (v_{11} is de wortel, elke pijl wijst naar de *parent*):



De inhoud van de queue Q is achtereenvolgens:

v_{11}
$v_{11}v_{21}$
$v_{11}v_{21}v_{12}$
$v_{21}v_{12}$
$v_{21}v_{12}v_{31}$
$v_{21}v_{12}v_{31}v_{22}$
$v_{12}v_{31}v_{22}$
$v_{12}v_{31}v_{22}v_{13}$
$v_{31}v_{22}v_{13}$
$v_{31}v_{22}v_{13}v_{32}$
$v_{22}v_{13}v_{32}$
$v_{22}v_{13}v_{32}v_{23}$
$v_{13}v_{32}v_{23}$
$v_{32}v_{23}$
$v_{32}v_{23}v_{33}$
$v_{23}v_{33}$
v_{33}
$\emptyset$