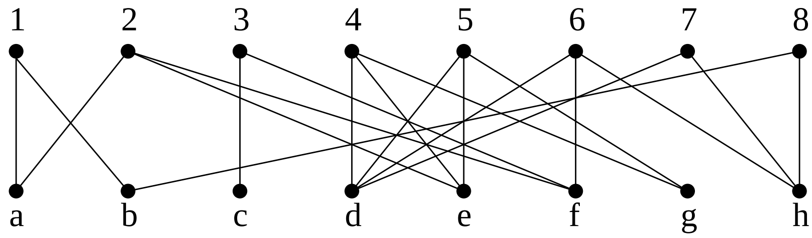
Discrete modellen in de toegepaste wiskunde (WISB136) Uitwerkingen van het tentamen.

Docent: Rob H. Bisseling, Universiteit Utrecht

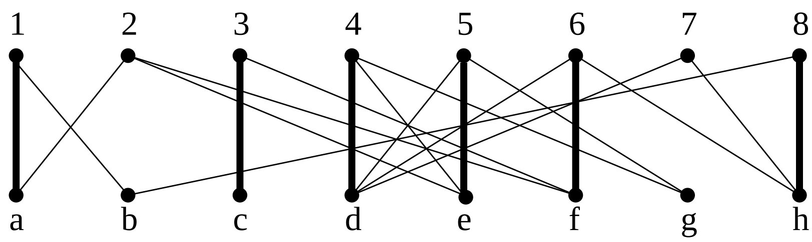
16 april 2012.

1. (a) Dit probleem kan geformuleerd worden als het vinden van een maximummatching in een bipartiete graaf $G[X, Y]$, met $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ de verzameling rijen en $Y = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ de verzameling kolommen, en met de zijden gegeven door de velden waar een toren mag staan. De bipartiete graaf ziet er zo uit:

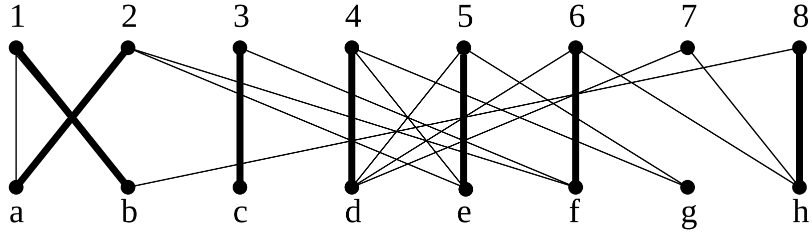


Twee torens die elkaar kunnen slaan, staan in dezelfde rij of kolom, en geven dus twee zijden horend bij eenzelfde knoop. Dit mag niet. We zoeken daarom een matching. We willen een zo groot mogelijk aantal zijden, en dus een maximummatching.

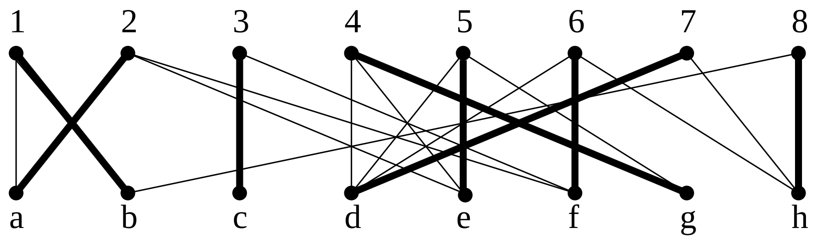
(b) Dit kan opgelost worden met het Hongaarse algoritme dat APS-bomen maakt, met hopelijk augmenterende paden. Er zijn meerdere goede oplossingen. Begin met een matching M. Makkelijk is de velden van de diagonaal te nemen als start: $M = \{a1, c3, d4, e5, f6, h8\}$.



Knoop 2 is ongematcht. Probeer een augmenterend pad te maken vanuit 2: $2a1b$. De zijde $a1$ is in de match, en de zijden $2a$ en $1b$ zijn er buiten. Flip de zijden. Dit geeft $M = \{a2, b1, c3, d4, e5, f6, h8\}$.



Knoop 7 is ongematcht. Een augmenterend pad is $7d4g$. Flip de zijden. Dit geeft $M = \{a2, b1, c3, d7, e5, f6, g4, h8\}$. De oplossing is een maximummatching, want hij is zelfs een perfecte matching, met $|M| = n/2 = 8$.



In het oorspronkelijke probleem ziet de oplossing er zo uit:

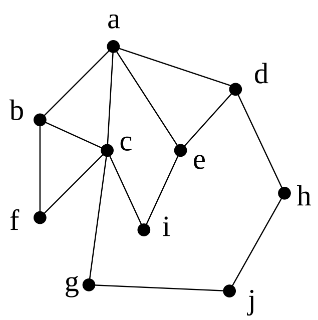
	a	b	c	d	e	f	g	h
8								×
7				×				
6						×		
5					×			
4							×	
3			×					
2	×							
1		×						

2. (a) Het Breadth-First Search algoritme om een BFS-boom te maken voor een graaf $G = (V, E)$ en een gegeven wortel $r \in V$ is:

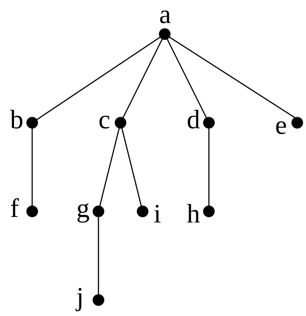
   $Q \leftarrow \{r\}$;
   for all $v \in V$ **do**
       $colour(v) =$ white ;
   while $Q \neq \emptyset$ **do**
       $x \leftarrow head(Q)$;
       if $\exists y \in N(x)$ with $colour(y) =$ white **then**
           $colour(y) =$ black ;
           $parent(y) = x$;
           $Q \leftarrow Q \cup \{y\}$; $tail(Q) = y$;
       else
           $Q \leftarrow Q \backslash \{x\}$;

   Hierbij is Q een queue (werkt volgens first-in, first out) met een kop (*head*) en een staart (*tail*). Een knoop is zwart als hij aan de boom toegevoegd is. De burenverzameling van x is $N(x)$. De boom wordt beschreven door de *parent*-relatie: voor iedere knoop in de boom wordt de ouder genoteerd.

   (b) De graaf kan planair getekend worden:



(c) Een bijbehorende BFS-boom is:



De inhoud van de queue ontwikkelt zich als volgt: $\emptyset \to a \to ab \to abc \to abcd \to abcde \to bcde \to bcdef \to cdef \to cdefg \to cdefgi \to defgi \to defgih \to efgih \to fgih \to gih \to gihj \to ihj \to hj \to j \to \emptyset$.

3. (a) Een samenhangende graaf is een graaf $G = (V, E)$ waarvoor er tussen elk paar knopen $x, y \in V$ een pad bestaat in E, d.w.z. $v_1 v_2 \cdots v_r$ met $v_1 = x$, $v_r = y$, en $v_i v_{i+1} \in E$ voor $i = 1, \ldots, r-1$.

   (b) Een acyclische graaf is een graaf waarvoor geen cykel bestaat. Een cykel is een pad $v_1 v_2 \cdots v_r$ met $v_r = v_1$, $r > 1$, en $v_i v_{i+1} \in E$ voor $i = 1, \ldots, r-1$, waarbij elke zijde in het pad éénmaal doorlopen wordt.

   (c) De inductie gaat naar het aantal knopen $n = |V|$ van de boom. Als $n = 1$ dan is de enige mogelijke zijde een lus, maar dat kan niet want de graaf is acyclisch. Dus $|E| = 0$. Ook $|V| = 1$, dus $|V| = |E| - 1$ klopt.

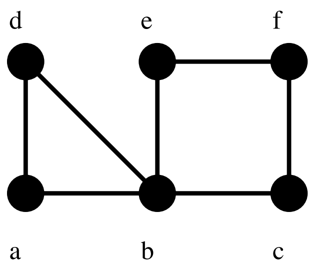
   Neem nu aan dat de stelling klopt voor alle bomen met minder dan n knopen. Stel G is een graaf met n knopen. Neem een willekeurige knoop $v \in V$. De graaf $G - \{v\}$ ontstaan door weglating van v en alle zijden van v heeft $n-1$ knopen, is acyclisch (want er kunnen geen cykels onstaan door weglating alleen), maar hoeft niet samenhangend te zijn. Stel $G - \{v\}$ heeft k componenten, zeg $C_i = (V_i, E_i), i = 1, \ldots, k$. Elke C_i is samenhangend en acyclisch, dus een boom, en heeft op grond van de inductieveronderstelling $|E_i| = |V_i| - 1$ zijden. Er is precies één zijde tussen v en component C_i. Als er meer zijden zouden zijn dan was er een cykel in E startend en eindigend in v, via component C_i. Het totaal aantal zijden in E is daarom

$$|E| = k + \sum_{i=1}^{k} |E_i| = k + \sum_{i=1}^{k} (|V_i| - 1) = k + |V| - 1 - k = |V| - 1.$$

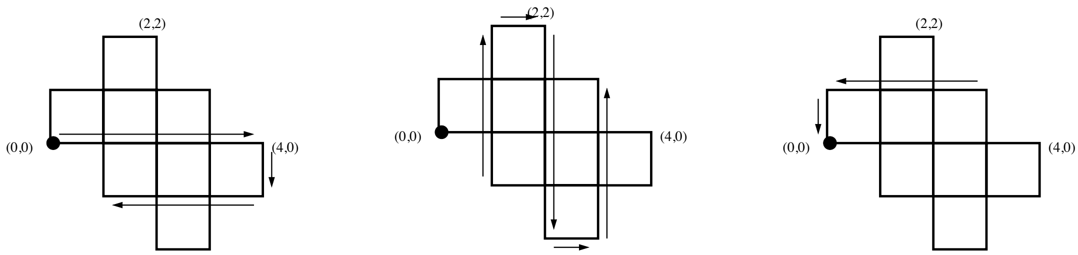
   Dus het klopt voor graaf G met n knopen. Hiermee is de stelling bewezen.

4. (a) Een Eulerse graaf is een graaf $G = (V, E)$ waarvoor een Eulertoer bestaat, d.w.z. een pad $v_1 v_2 \cdots v_r$ met $v_r = v_1$, $r \geq 1$, en $v_i v_{i+1} \in E$ voor $i = 1, \ldots, r-1$, waarbij elke zijde in de graaf precies éénmaal doorlopen wordt.

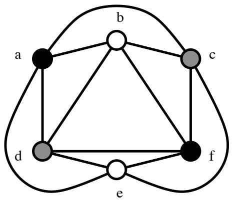
   (b) Ja. Het volgende is een voorbeeld van zo'n Eulerse graaf, met 6 knopen en 7 zijden. Een Eulertoer is $abcfebda$.



(c) Ja, de graaf is Eulers. Een Eulertoer is als volgt:



5. (a) De linkergraaf en rechtergraaf zijn isomorf. Dit zie je door in de linkergraaf zijde ac buitenom te leggen (dus boven b), en net zo zijde df buitenom te leggen (dus onder e). Beide grafen zijn planair en kunnen zo ingebed worden:



Vanwege de isomorfie hoeven we slechts naar de linkergraaf te kijken. De inbedding wordt verkregen door zijden ac, ae en ce buitenom te leggen.

(b) Een kleuring heeft minstens 3 kleuren nodig: b mag niet dezelfde kleur als a hebben, vanwege de zijde ab, en c moet een derde kleur hebben, ongelijk aan die van a en b, vanwege de zijden ac en bc. Een 3-kleuring van de knopen (met kleuren wit, grijs, zwart) is in de figuur aangegeven. Deze kleuring heeft dus het minimale aantal kleuren.