Discrete modellen in de toegepaste wiskunde (WISB136) Hertentamen.

Docent: Rob H. Bisseling, Universiteit Utrecht

31 mei 2012. Tijd 9.00 - 12.00 uur.

Elke vraag is 10 punten waard. Totaal aantal te behalen punten is 50. Tijd 180 minuten. Je mag geen rekenmachine, boeken, of aantekeningen gebruiken. Motiveer je antwoorden. Veel succes!

1. (a) (2 pnt) Stel de graaf G is gegeven door de volgende verbindingsmatrix (En: *adjacency matrix*):

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

   Teken de bijbehorende graaf. Nummer de knopen $1, 2, 3, \ldots, 10$ (in de volgorde van de matrixrijen/kolommen).

   (b) (3 pnt) Is deze graaf planair? Zo ja, geef een planaire inbedding. Zo nee, beredeneer waarom niet.

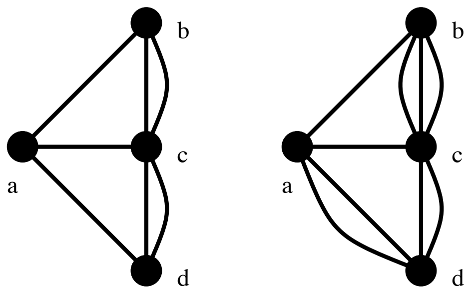
   (c) (5 pnt) Kleur de graaf met het minimale aantal kleuren. Beredeneer waarom kleuring met minder kleuren niet kan.

2. Zij $G = (V, E)$ een samenhangende even graaf.

   (a) (2 pnt) Bewijs dat G geen snijzijden (En: *cut edges*) heeft.

   (b) (4 pnt) Bewijs dat voor elke knoop $v \in V$ geldt dat $c(G - v) \leq d(v)/2$, waarbij $c(G)$ het aantal componenten van een graaf G is, en $G - v$ de graaf is die ontstaat door knoop v en alle aanliggende zijden weg te laten uit G.

   (c) (2 pnt) Welke van de volgende twee grafen is samenhangend en even?



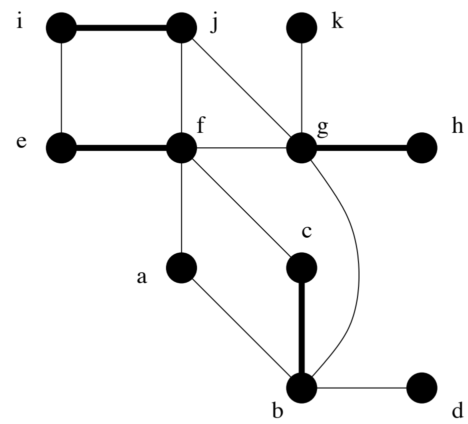
(d) (2 pnt) Welke van de twee is Eulers? Voor een Eulerse graaf, geef een Eulertoer.

3. Zij M een matching in een graaf $G = (V, E)$.

   (a) (2 pnt) Geef de definitie van een M-augmenterend pad.

   (b) (2 pnt) Geef de definitie van een APS-boom (*augmenting-path-search tree*) met wortel u behorend bij de matching M.

   (c) (6 pnt) Geef ófwel een M-augmenterend pad startend in knoop a, ófwel een APS-boom met wortel a voor de volgende graaf. De matching is aangegeven door vette zijden.



4. Zij $G = (V, E)$ een samenhangende acyclische graaf met $E \neq \emptyset$.

   (a) (8 pnt) Bewijs met volledige inductie dat er tenminste twee knopen zijn met graad 1.

   (b) (2 pnt) Hoe noemen we zo'n graaf en dergelijke knopen?

5. (a) (5 pnt) Formuleer het algoritme van Dijkstra om een kortste pad te vinden in een gerichte graaf $G = (V, E)$ van startknoop S naar eindknoop T.

   (b) (5 pnt) Bereken de kortste route van S naar T (en de lengte ervan) voor de volgende gerichte graaf.