Discrete modellen in de toegepaste wiskunde (WISB136). Hertentamen.

Docent: Rob H. Bisseling, Universiteit Utrecht

23 mei 2013. Tijd 13.30 - 16.30 uur.

Elke vraag is 10 punten waard. Totaal aantal te behalen punten is 50. Tijd 180 minuten. Je mag geen rekenmachine, boeken, of aantekeningen gebruiken. Motiveer je antwoorden. Veel succes!

1. We willen een zo groot mogelijk aantal torens op een 8×8 schaakbord plaatsen zonder dat ze elkaar slaan. Dit betekent dat er ten hoogste één toren in elke rij mag staan en ten hoogste één toren in elke lijn (kolom). We mogen niet het hele schaakbord gebruiken; slechts op de velden (zoals a8) aangegeven met een kruisje '$\times$' mogen we een toren plaatsen:

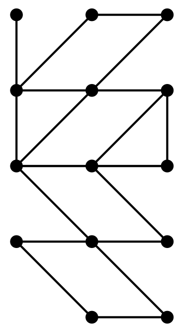
8	$\times$		$\times$					
7	$\times$					$\times$		
6		$\times$					$\times$	
5		$\times$	$\times$					
4				$\times$	$\times$			$\times$
3			$\times$			$\times$		
2					$\times$		$\times$	
1						$\times$		$\times$
	a	b	c	d	e	f	g	h

   (a) (3 pnt) Formuleer dit probleem als een grafenprobleem.

   (b) (7 pnt) Los het probleem op. Motiveer waarom je oplossing inderdaad het maximum aantal torens plaatst.

2. Het Welch–Powell algoritme kleurt een graaf door de knopen volgens dalende graad te ordenen en in deze volgorde knopen een kleur te geven. De eerste kleur C_1 wordt gebruikt voor elke knoop die geen buur van een eerder C_1-gekleurde knoop is. Daarna worden de resterende knopen met een andere kleur C_2 gekleurd, voorzover deze geen buur van een eerder C_2-gekleurde knoop zijn. De volgorde is weer naar dalende graad. Daarna wordt, indien nodig een derde kleur gebruikt, enzovoorts.

   (a) (5 pnt) Pas het Welch–Powell algoritme toe op de volgende graaf. Is het gebruikte aantal kleuren minimaal?



(b) (5 pnt) Bewijs dat een graaf met 2 kleuren te kleuren is, dan en slechts dan als hij bipartiet is.

3. Stel $G = (V, E)$ is een planaire samenhangende graaf met $n = |V|$ knopen en $m = |E|$ zijden.

   (a) (2 pnt) Hoeveel gebieden f (En: *faces*) heeft de graaf?

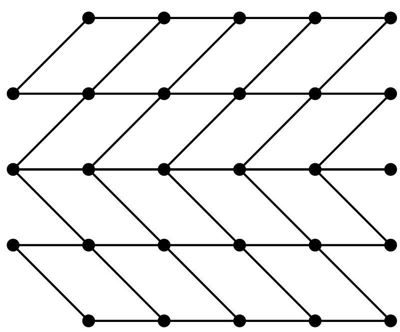
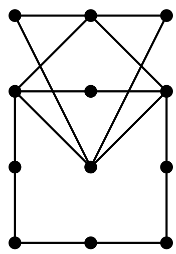
   (b) (2 pnt) Laat zien dat K_4, de volledige graaf met 4 knopen, planair en samenhangend is, en verifieer dat de bovenstaande formule voor f klopt.

   (c) (3 pnt) Stel $m \geq 3$ en de graaf is simpel (geen zelflussen of parallelle zijden). Bewijs met behulp van de formule van (a) dat $m \leq 3n - 6$.

   (d) (3 pnt) Bewijs hiermee dat K_5 niet planair is.

4. (a) (2 pnt) Geef de definitie van een Eulerse graaf.

   (b) (twee maal 4 pnt) Welke van de volgende grafen is Eulers? Als de graaf Eulers is geef een Eulertoer. Anders, beredeneer dat er geen Eulertoer bestaat.

5. (a) (4 pnt) Formuleer het Breadth-First Search algoritme om een BFS-boom te maken voor een graaf $G = (V, E)$ en een gegeven wortel $r \in V$ (En: *root*). De enige benodigde output is de boom zelf. Leg de betekenis van de gebruikte variabelen uit.

   (b) (2 pnt) Stel G_k is de graaf behorend bij het $k \times k$ vierkante rooster in twee dimensies, met knopenverzameling $V_k = \{v_{ij} | i = 1, 2, \ldots, k \text{ en } j = 1, 2, \ldots, k\}$ en zijden tussen een knoop v_{ij} en zijn vier buren $v_{i-1,j}$, $v_{i+1,j}$, $v_{i,j-1}$, $v_{i,j+1}$, voorzover deze bestaan. Teken de bijbehorende graaf voor $k = 3$.

   (c) (4 pnt) Maak met behulp van het BFS algoritme een BFS-boom voor de graaf G_3 met wortel v_{11}. Laat hierbij op elk moment zien welke knopen in je datastructuur opgeslagen zijn.