

# Discrete modellen in de toegepaste wiskunde (WISB136). Tentamen.

Docent: Rob H. Bisseling, Universiteit Utrecht

15 april 2013. Tijd 9.00 - 12.00 uur.

*Elke vraag is 10 punten waard. Totaal aantal te behalen punten is 50. Tijd 180 minuten. Je mag geen rekenmachine, boeken, of aantekeningen gebruiken. Motiveer je antwoorden. Veel succes!*

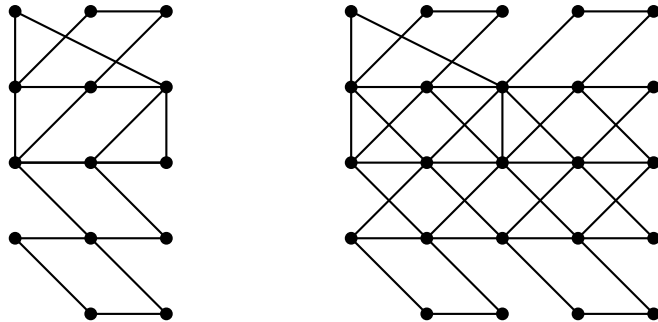
- (2 pnt) Geef de definitie van een bipartiete graaf.
  - (2 pnt) Gegeven is de graaf  $Q_3$  met als knopen (*vertices*) de 8 hoekpunten van een kubus en als zijden (*edges*) de 12 ribben. Laat zien dat deze graaf bipartiet is.
  - (2 pnt) Geef de definitie van een graafmatching.
  - (2 pnt) Geef een maximummatching van de graaf  $Q_3$ .
  - (2 pnt) Is de graaf  $Q_3$  planair? Zo ja, geef een planaire inbedding. Zo nee, beargumenteer.
- Stel de  $8 \times 8$  matrix  $A$  wordt gegeven door

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

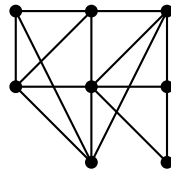
Deze matrix heet *ijl*, want hij bevat veel nullen. Stel we willen de rijen en de kolommen zo permuteren dat de diagonaal alleen getallen ongelijk 0 bevatten. (Dit helpt bij het oplossen van een lineair stelsel  $Ax = b$ .) Hiertoe moeten we een geschikte verzameling van 8 *pivots* bepalen, dat wil zeggen matrixelementen  $a_{ij} \neq 0$ . Als  $a_{ij}$  de eerste pivot is kunnen we rij  $i$  en rij 1 verwisselen, en kolom  $j$  en kolom 1. Er komt dan een nietnul op positie (1,1) te staan in de gepermuteerde matrix. Daarna kunnen we de tweede pivot gebruiken om op positie (2,2) een nietnul te plaatsen, enzovoorts.

- (3 pnt) Formuleer het probleem van het zoeken naar een verzameling pivots  $P = \{(i_1, j_1), \dots, (i_r, j_r)\}$  als een grafenprobleem. Kunnen er twee pivots in dezelfde rij staan?
- (7 pnt) Los het probleem op. Bepaal een verzameling  $P$  met het maximum aantal mogelijke pivots. Kun je door permutaties een diagonaal zonder nullen verkrijgen?

3. (a) (2 pnt) Geef de definitie van een Eulerse graaf.  
 (b) (twee maal 4 pnt) Welke van de volgende grafen is Eulers? Als de graaf Eulers is geef een Eulertoer. Anders, beredeneer dat er geen Eulertoer bestaat.



4. (a) (5 pnt) Geef een kleuring van de knopen van de volgende graaf met het minimaal mogelijke aantal kleuren. Beargumenteer dat het niet met minder kleuren kan.



- (b) (5 pnt) Bewijs dat een graaf met 2 kleuren te kleuren is, dan en slechts dan als elke cykel een even lengte heeft.  
 5. (a) (5 pnt) Formuleer het algoritme van Dijkstra om een kortste pad te vinden in een gerichte graaf  $G = (V, E)$  van startknoop  $S$  naar eindknoop  $T$ .  
 (b) (5 pnt) Bereken de kortste route van knoop  $S$  naar knoop  $T$  (en de lengte ervan) voor de volgende gerichte graaf. Het getal naast elke pijl geeft de afstand weer in de pijlrichting.

