# Tentamen Infinitesimaalrekening B

19 januari 2012, uitwerkingen.

Deze uitwerkingen zijn niet de enig mogelijke! Voor correcties houd ik mij aanbevolen.

**Opgave 1**. Omdat de functies $(x, y) \mapsto x$ continu is en $x \mapsto |x|$ ook, is de functie $(x, y) \mapsto |x|$ ook continu. Veeltermen zijn continu, dus ook $(x, y) \mapsto x$ en $(x, y) \mapsto y^3$. De som en verschil van twee continue functies is continu dus zijn $(x, y) \mapsto |x| - y^3$ en $(x, y) \mapsto |x| + y^2$ continu. Tenslotte is het quotiënt van twee continue functies continu in punten waar de noemer niet 0 is, conclusie is dat $f$ continu is in alle punten $(x, y) \neq (0, 0)$.
De limiet $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ bestaat niet. Als je nadert via $(x, y) = (0, t)$ met $t \to 0$ krijg je $\lim_{t\to0} f(0, t) = \lim_{t\to0} -t = 0$ en als je nadert via $(x, y) = (t, 0)$ met $t \to 0$ krijg je $\lim_{t\to0} f(t, 0) = \lim_{t\to0} 1 = 1$.

**Opgave 2.**
Stel $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x, y, z) = 3x^2 - 2y^2z$.
$f$ is overal differentieerbaar omdat de partiële afgeleiden overal bestaan $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -4yz$ en $\frac{\partial f}{\partial z} = -2y^2$ overal bestaan en overal continu zijn.
Door invullen in de partiële afgeleiden vinden we $\nabla f(1, -1, 1) = (6, 4, -2)$ en verder is $f(1, -1, 1) = 3-2 = 1$, We vinden de volgende lineaire benadering van $f$ in het steunpunt $(1, -1, 1)$: $(x, y, z) \mapsto 1+6(x-1)+4(y+1)-2(z-1) = 6x+4y-2z+1$.
De richtingsafgeleide van $f$ in het punt $(1, -1, 1)$ in de richting $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ is $(6, 4 - 2) \cdot (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = 4$.
De vergelijking van het raakvlak in $(1, -1, 1)$ aan het oppervlak $3x^2 - 2y^2z = 1$ is $\nabla f(1, -1, 1)\cdot(x-1, y+1, z-1) = 0$ hetgeen leidt tot $6(x-1)+4(y+1)-2(z-1) = 0$ ofwel
$6x + 4y - 2z = 0$.

**Opgave 3**. De kettingregel levert $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$ (*)
De productregel geeft $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial g}{\partial u})\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial g}{\partial v})\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$.
Nog eens de kettingregel geeft $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial g}{\partial u}) = (\frac{\partial^2 g}{\partial u^2})\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$ en op dezelfde manier $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial g}{\partial v}) = (\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v})\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}$ . We gebruiken hier $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}$ hetgeen volgt uit de twee keer continu differentieerbaarheid van $g$.
Alles optellend krijgen we
$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} \cdot (\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$. (**)

b. We hebben nu $u = x^2 + y$ en $v = x^2 - y$ en $h(x, y) = 4x^2y$, en dus $\frac{\partial h}{\partial x} = 8xy$ en $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 8y$. De formule (*) levert
$2u \cdot 2x - 2v \cdot 2x = 4x(u - v) = 4x(x^2 + y - x^2 + y) = 8xy$, klopt dus.
In de formule (**) is in het voorbeeld $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$.
De rest invullen levert $2 \cdot 2x - 2 \cdot 2x + 2u \cdot 2 - 2v \cdot 2 = 4(u - v) = 8y$, klopt dus ook.

**Opgave 4.** De kritieke punten krijgen we door de partiële afgeleiden 0 te stellen. We krijgen zo
$6x^2 + 6y = 0$ en $6y + 6x = 0$. Dus is $x^2 = -y$ en $y = -x$ zodat $x^2 = x$, dit leidt tot de oplossingen $x = 0$ en $x = 1$. We vinden de kritieke punten $(0, 0)$ en $(1, -1)$.
Vervolgens berekenen we de coëfficienten van de Hessiaan uit
$a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x$, $b = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6$, en $c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6$.
In $(x, y) = (0, 0)$ geldt $ac - b^2 = -36 < 0$ en dus is daar een zadelpunt (de functiewaarde is er 0).
In $(x, y) = (1, -1)$ geldt $ac - b^2 = +36 > 0$ en dus is daar een globaal extreem. Omdat $a > 0$ is het een minimum (de functiewaarde is daar -1).

**Opgave 5.**
We bekijken de functie
$f(x, y, z) = x - y + z$ op het gebied $(x - y)^2 + y^2 + z^2 \leq 2$.
Het gebied is gesloten omdat de rand er deel van uitmaakt vanwege het $\leq$-teken. Het is begrensd omdat voor alle $(x, y, z)$ in het gebied moet gelden $(x-y)^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ dus $z^2 \leq 2$ en $y^2 \leq 2$ dus in elk geval $-\sqrt{2} \leq z \leq \sqrt{2}$ en $-\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$. Er moet ook gelden $-\sqrt{2} \leq x - y \leq \sqrt{2}$ dus in elk geval $-2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$.
De functie is continu (want een veelterm) dus neemt de functie op het gebied zijn maximale en minimale waarde aan.
Om te kijken waar dit gebeurt kijken we eerst of er kritieke punten zijn. Omdat $\nabla f(x, y, z) = (1, -1, 1) \neq (0, 0, 0)$ zijn die er echter niet. Dus worden de extreme waarden aangenomen op de rand. Stel er is een extreem in $(x, y, z)$ dan moet volgens de multiplicatorenmethode van Lagrange er $\lambda$ bestaan zodat
$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$ waarbij $g(x, y, z) = (x - y)^2 + y^2 + z^2$.
Hieruit krijgen we $(1, -1, 1) = \lambda(2x - 2y,\ -2x + 4y,\ 2z)$.
Dus $1 = 2\lambda z$ en hieruit volgt $\lambda \neq 0$. We kunnen $\lambda$ nu elimineren en krijgen
$2z = 2x - 2y$ en $-2x + 4y = -2x + 2y$ waaruit volgt $y = 0$ en $z = x$. Omdat het extreem op de rand ligt hebben we ook $(x - y)^2 + y^2 + z^2 = 2$ dus $2x^2 = 2$ en dus $x = \pm 1$. We krijgen twee mogelijkheden$(1, 0, 1)$ met functiewaarde 2, dit moet het maximum zijn;
en $(-1, 0, -1)$ met functiewaarde -2, dit moet het minimum zijn.

**Opgave 6.** De integraal kan o.a. worden berekend als
$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} y\,dy\,dx = \int_0^2 \frac{1}{2}(2x-x^2)\,dx = \frac{1}{2}2^2 - \frac{1}{6}2^3 = \frac{2}{3}$.

**Opgave 7.** De vergelijking van de rechte lijn in het $x-y$-vlak door $(0,0,0)$ en $(1,2,0)$ is $y = 2x$. De vergelijking van het vlak door $(0,0,0)$, $(1,2,0)$ en $(1,0,2)$ is $z = 2x - y$. Met behulp van deze gegevens kan de integraal berekend worden:
$\int_0^1 \int_0^{2x} \int_0^{2x-y} x^2\,dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{2x} 2x^3 - x^2 y\,dy\,dx = \int_0^1 4x^4 - \frac{1}{2}x^2 \cdot 4x^2\,dx = \int_0^1 2x^4\,dx = \frac{2}{5}$.

**Opgave 8.** Opmerking: in de opgave stond een typefout waardoor de straal van het boldeel $\sqrt{R}$ is in plaats van de bedoelde $R$. De opgave wordt uiteraard voor beide mogelijkheden goed gerekend. We laten hier de versie zien voor het deel van de bol $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.
Deze kunnen we oplossen door bolcoördinaten te substitueren: $x = \rho \sin\phi \cos\theta, y = \rho \sin\phi \sin\theta, z = \rho\cos\phi$; echter, we laten $\theta$ nu lopen bijvoorbeeld van $-\pi$ tot $\pi$. De Jacobiaan is dan $\rho^2 \sin\phi$ net zoals bij gewone bolcoördinaten (in de partiële afgeleiden en de determinant verandert niets).
De integraal wordt:
$\int_0^R \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \rho\sin\phi\cos\theta \cdot \rho\cos\phi \cdot \rho^2 \sin\phi\,d\phi\,d\theta\,d\rho$.
Het antwoord is $\int_0^R \rho^4\,d\rho \cdot \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\,d\theta \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2\phi\cos\phi\,d\phi = \frac{1}{5} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{-1}{3} = -\frac{1}{15}\sqrt{2}R^5$.

**Bonusopgave: Opgave 9.**
Hiervan geven we uiteraard geen uitwerking. Er moet iets over blijven om zelf aan te werken. We vermelden alleen het antwoord $\frac{2}{3}\pi(2r)^3 - \frac{8}{9}(2r)^3$. Een geschikte halve bol minus het stuk van de cylinder dat daarbinnen valt is dus blijkbaar een lichaam met kromme oppervlaktes maar inhoud een rationaal veelvoud van $(2r)^3$. We merken nog op dat de bol en de cilinder elkaar doorsnijden in een kromme die al in de Griekse oudheid bestudeerd werd: de hippopede van Eudoxos (ca. 350 voor Chr.)