Tentamen Infinitesimaalrekening A

7 november 2013, 13.30 – 16.30 uur

- Maak de opgaven op het uitgereikte papier en vul op elk blad dat je inlevert je naam en studentnummer in.
- Zet op het eerste blad het nummer van je groep (aan het eind van de cursus).
  1 (BBL 023), Ralph Klaasse, Thom Klaasse, Yasha Oloumi
  2 (BBL 169/205) Siamak Taati, Julius Linssen, Robert Silfhout
  3 (WISK 611/BBL 112) Henk Hietbrink, Kaj-Ivar van der Wijst
  4 (BBL 077) Roy Wang, Ruben van Nieuwpoort
  5 (BBL 071) Wilfred de Graaf, Bram Wage
- Geef niet alleen het antwoord, maar laat ook zien hoe je aan dat antwoord komt.
- Je hoeft alleen de eerste zeven opgaven te maken, deze tellen elk voor tien punten, behalve opgave 4, die voor 15 punten telt. Het tentamencijfer is het totaal aantal punten gedeeld door 7,5. Met de achtste opgave (bonusopgave) kun je maximaal tien punten extra verdienen, met dien verstande dat het tentamencijfer nooit hoger dan 10 kan zijn.
- Op dit tentamen mogen geen rekenapparaten of andere electronica gebruikt worden, en ook geen boeken, dictaten of eigen aantekeningen.
- Veel succes!

Opgave 1. Bepaal alle complexe getallen z die voldoen aan $z^2 - 7iz + 22i = 6z + 4$. Geef de getallen in de vorm $a + bi$ waarbij a en b rationale getallen zijn.

Opgave 2. Bepaal de volgende limieten:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x - x}{\sin(x^3)} \quad \text{en} \quad \lim_{x \to \infty} \sqrt{x} - \sqrt{(x - \sqrt{x})}$$

Opgave 3. Bepaal de derde-orde Taylorveelterm van $f(x) = \sqrt{1 + x}$ in het steunpunt 0, en bepaal hiermee een benadering van $\sqrt{1,2}$ in vier decimalen achter de komma.

Toon aan dat de fout in deze benadering kleiner is dan $\frac{1}{10.000}$ [d.w.z. de benadering kan hoogstens één eenheid van de vierde decimaal achter de komma afwijken van de exacte waarde van $\sqrt{1,2}$]. Z.O.Z!!!!!

Opgave 4 (15 punten). (a) Primitiveer voor $x > 4$ de functie $f(x) = \dfrac{1}{2 - \sqrt{x}}$. Controleer het antwoord door differentiëren.

(b) Bereken $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2 - x + 1}\,dx$. Werk het antwoord helemaal uit (in rationale getallen, wortels, en getallen zoals π).

Opgave 5. Bepaal alle differentieerbare functies $y(x)$, die gedefinieerd zijn op het domein $(0, \infty)$, en waarvoor geldt $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x} = 0$. Controleer je antwoord door differentiëren.

Bepaal daarna een differentieerbare functie $y(x)$, die gedefinieerd is op het domein $(0, \infty)$, en waarvoor geldt $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x} = 1$ en $y(1) = 0$.

Opgave 6. Bepaal alle tweemaal differentieerbare reële functies $y(x)$ zodat $y'' + 2y' + 5y = 5\cos x$ voor alle x.

Opgave 7. Bereken $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \ln(1 + \frac{2k}{n})$ (ln is de natuurlijke logaritme)

Bonusopgave. Opgave 8, over de namen sinus- en cosinushyperbolicus.

(a) Laat zien dat de functie $f(t) = \cosh t$ met domein $[0, \infty)$ een inverse heeft en bereken deze inverse.

(b) Kies een punt $P = (x, y)$ op de hyperbool $y^2 = x^2 - 1$ met $x > 1, y > 0$ en stel $Q = (x, 0)$ en $O = (0, 0)$, $T = (1, 0)$, zie het onderstaande plaatje, rechts. Laat zien: als $t/2$ de oppervlakte is van het gebied OPT tussen O en de hyperbool, dan is $|OQ| = \cosh t$ en $|PQ| = \sinh t$.

Opmerking: Voor de cirkel met straal 1, zie plaatje links, geldt: als $t = \angle POT$ *dan is* $t/2$ *de oppervlakte van sector OPT en* $|OQ| = \cos t$ *en* $|PQ| = \sin t$. *Dit verband verklaart de namen cosinus- en sinushyperbolicus, die in 1757 zijn ingevoerd door Vincentio Ricatti.*