UITWERKINGEN

1. Gegeven in $\mathbb{R}^3$ zijn de punten $P = (1, -1, 0)^t$ en $Q = (-2, 0, 1)^t$ en het vlak V gegeven door de vergelijking $2x_1 - x_2 + x_3 = 1$. Zij l de lijn door P loodrecht op V en m de lijn door Q loodrecht op V.

   (a) De richting van l, m wordt gegeven door de normaalvector van V, dus $(2, -1, 1)^t$. Parametervoorstelling van l: $(1, -1, 0)^t + \lambda(2, -1, 1)^t$ en van m: $(-2, 0, 1)^t + \mu(2, -1, 1)^t$.

   (b) Voor de afstand tussen l, m zijn er twee methoden:
   Methode 1: Kies op m het punt R waarvan de afstand tot P minimaal is. Doordat l, n parallel zijn, is PR de afstand tussen de twee lijnen. Bepaling van R: kies μ zó dat het verschil tussen $(-2, 0, 1)^t + \mu(2, -1, 1)^t$ en $(1, -1, 0)^t$ loodrecht op $(2, -1, 1)^t$ staat. Het verschil: $(-3, 1, 1)^t + \mu(2, -1, 1)^t = 2\mu - 3, -\mu + 1, \mu + 1)^t$. Loodrecht op $(2, -1, 1)^t$: $0 = 2(2\mu - 3) - (-\mu + 1) + \mu + 1 = 6\mu - 6$. Dus $\mu = 1$, en R wordt gegeven door $(0, -1, 2)^t$. Afstand tussen P en R: $\sqrt{(1-0)^2 + (-1-(-1))^2 + (0-2)^2} = \sqrt{5}$.
   Methode 2: Bepaal de snijpunten S, T van l, m met V en bepaal de afstand tussen S en T. Merk hiertoe op de verbindings lijn tussen S, T loodrecht staat op zowel l als m.

   (c) Zij W het vlak dat P en Q bevat en dat loodrecht op V staat. Gevraagd wordt een vergelijking van W.
   Methode 1: Stel de vergelijking is $ax + by + cz = d$ waarin a, b, c, d nog te bepalen zijn. De normaalvector $(a, b, c)^t$ moet loodrecht staan op de normaal $(2, -1, 1)^t$ van V. Dus $2a - b + c = 0$. Omdat $P \in W$ geldt $a - b = d$ en $Q \in W$ impliceert $-2a + c = d$. Dit geeft een stelsel vergelijkingen in de onbekeneden a, b, c, d. Schematisch:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & d \\ -2 & 0 & 1 & d \end{array}\right).$$

   Eliminatie van a geeft

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & d \\ 0 & -1 & 2 & d \end{array}\right).$$

   Eliminatie van b,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & d \\ 0 & 0 & 3 & -d \end{array}\right).$$

Kies nu $d = 3$ (we hebben maar 1 vergelijking nodig). Dan volgt hieruit dat $c = -1, b = -5, a = -2$. Een vergelijking wordt dus $-2x - 5y - z = 3$.
Methode 2: Twee onafhankelijke richting in W worden gegeven door $(2, -1, 1)^t$, de normaal van V en $(3, -1, -1)^t$, de vector van Q naar P. Een parametervoorstelling van W (met steunvector P) wordt gegeven door $(1, -1, 0)^t + \lambda(2, -1, 1)^t + \mu(3, -1, -1)^t$. Hieruit leiden we op de standaardmanier een vergelijking van W af.

2. Bekijk voor een willekeurig reëel getal a de matrix

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & a & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) De matrix M_a is inverteerbaar als zijn gereduceerde vorm drie pivotelementen bevat.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & a & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eerste rij 2 maal van tweede en 3 maal van derde aftrekken,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1-2a \\ 0 & 2 & 1-3a \end{pmatrix}.$$

We kunnen de tweede en derde rij verwisselen en verder gaan met de eliminatie. We kunnen ook op de standaardmanier verder, maar moeten dan aannemen dat $a \neq 0$. Trek in dat geval $2/a$ maal de tweede rij van de derde af,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1-2a \\ 0 & 0 & 1-3a-\frac{2}{a}(1-2a) \end{pmatrix}.$$

De matrix is inverteerbaar als $1 - 3a - \frac{2}{a}(1 - 2a) \neq 0$. Met a vermenigvuldigen en uitwerken: $-3a^2 + 5a - 2 \neq 0$. Merk op dat $-3a^2 + 5a - 2 = 0 \iff a = 1, a = 3/2$. Conclusie: $a \neq 1, 3/2$.
Tenslotte moeten we het geval $a = 0$ nog uitwerken.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verwissel nu tweede en derde rij en maak de eliminatie af. We zien dat we drie pivots overhouden en dus is de matrix M_0 inverteerbaar.

(b) (1 pt) Inverse van M_2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Eerste rij 2 maal van tweede en 3 maal van derde aftrekken,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Trek 1 maal de tweede rij van de derde af,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Trek de laatste rij 3/2 maal van de tweede en tel 1 maal bij de eerste op,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1/2 & 5/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Vermenigvuldig de tweede rij met 1/2 en de derde met $-1/2$,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 5/4 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right).$$

De rechtermatrix is de gevraagde inverse.

3. Zij V het opspansel van de vectoren $(1,1,2,0)^t, (2,6,3,-2)^t, (3,-1,7,2)^t$ in $\mathbb{R}^4$.

   (a) Basis en de dimensie van V. Schrijf de vectoren in kolomvorm en voer rijreductie uit,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   De gerduceerde vorm bevat twee pivotelementen en wel in kolom 1,2. Dat betekent de rang 2 is en een basis wordt gegeven door de eerste twee vectoren.

(b) Homogene vergelijkingen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ in $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ zó dat de oplossingsverzameling precies V is.

Beschouw een vergelijking $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0$ die V in zijn oplossingsruimte bevat. Dan zijn de eerste twee van bovenstaande vectoren in de oplossingsruimte bevat. dat wil zeggen:

$$\begin{aligned} a + b + 2c &= 0 \\ 2a + 6b + 3c - 2d &= 0 \end{aligned}$$

Twee onafhankelijke oplossingen worden gegeven door $(4, 0, -2, 1)$ en $(0, 4, -2, 9)$. Stel nu

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Dan zijn de twee eerste vectoren van de opgave bevat in de nulruimte van A en dus is V bevat in de nulruimte van A. Verder is de rang van A gelijk aan twee (de rijen zijn onafhankelijk) en dus heeft A nulruimte van dimensie $4 - 2 = 2$. Daarmee is V de gehele nulruimte van A.

(c) Zij m een A een $m \times 4$-matrix zó dat V bevat is in de nulruimte van A. Er geldt $\text{rang}(A) + \dim(Nul(A)) = 4$. Omdat V bevat is in de nulruimte moet gelden dat $\dim(Nul(A)) \geq 2$. Dit impliceert dat $\text{rang}(A) \leq 2$.

4. Zij $U \subset \mathbb{R}^4$ de deelruimte gegeven door de vergelijkingen $x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$ en $x_1 - 3x_3 = 0$. Zij V de deelruimte van $\mathbb{R}^4$ opgespannen door de vectoren

$$(2, 0, -1, 1)^t, (1, 2, -3, 1)^t.$$

(a) De coefficientenmatrix van de vergelijkinegn voor U luidt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

De rang hiervan is 2. De nulruimte U heeft dus dimensie $4 - 2 = 2$.

De vectoren die V opspannen zijn onafhankelijk, en dus heeft V dimensie 2.

(b) De coordinaten van de vectoren in V hebben de vorm

$$\lambda(2, 0, -1, 1)^t + \mu(1, 2, -3, 1)^t = (2\lambda + \mu, 2\mu, -\lambda - 3\mu, \lambda + \mu)^t.$$

Om te zien voor welke λ, μ deze vectoren tot U behoren, vullen we ze in de vergelijkingen voor U in.

$$\begin{aligned} 0 &= (2\lambda + \mu) + (2\mu) - 2 \cdot (-\lambda - 3\mu) + (\lambda + \mu) = 5\lambda + 10\mu \\ 0 &= (2\lambda + \mu) - 3 \cdot (-\lambda - 3\mu) = 5\lambda + 10\mu = 0 \end{aligned}$$

Oplossing: $\lambda = -2\mu$ invullen in de vectoren van V geeft,

$$\mu(-3, 2, -1, -1)^t.$$

De dimensie van $U \cap V$ is dus 1 en een basis wordt gegeven door $(-3, 2, -1, -1)^t$.

5. Zij A, B een tweetal $n \times n$-matrices.

   (a) Voor een willekeurige vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ geldt dat $A\mathbf{x}$ een vector is die lineaire combinatie is van de kolommen van A. Dit impliceert dat de kolommen van AB allemaal lineaire combinaties zijn van kolommen van A. Daarmee is het opspansel van de kolommen van AB bevat in het opspansel van de kolommen van A.

   (b) Omdat de ruimte opgespannen door de kolommen van AB bevat is in de ruimte opgespannen door de kolommen van A geldt dat $\text{rang}(AB) \leq \text{rang}(A)$. Immers de rang van een matrix is gedefinieerd als de rang van zijn kolommen, hetgeen gelijk is aan de dimensie (of rang) van de ruimte opgespannen door zijn kolommen.