

# Tentamen Elementaire Getaltheorie (WISB321)

16 januari 2012, 9.00-12.00 uur

- Schrijf op ieder vel dat je inlevert je naam en je studentnummer.
- Bij dit deeltentamen mogen geen dictaat, boek, aantekeningen, uitwerkingen en grafische of andere geavanceerde rekenmachines worden gebruikt.
- **Laat bij elke opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.**

Succes!

## Opgave 1

Bepaal het *kleinste positieve gehele getal*  $x$  dat voldoet aan de drie congruentievergelijkingen

$$x \equiv 6 \pmod{11}, \quad x \equiv 8 \pmod{25}, \quad x \equiv 13 \pmod{27}.$$

## Opgave 2

- Laat zien dat 293 een priemgetal is.  
(Opmerking: dit kan zonder ingewikkelde priemgetaltesten.)
- Heeft de congruentievergelijking  $x^2 \equiv 10 \pmod{293}$  een oplossing  $x \in \mathbb{Z}$ ?
- Bepaal het kleinste positieve gehele getal  $a$  dat voldoet aan de congruentie  $10^{146} \equiv a \pmod{293}$ .
- Bepaal het 146-ste cijfer achter de komma in de decimale ontwikkeling van  $\frac{1}{293}$ .

## Opgave 3

Per definitie wordt de kettingbreukontwikkeling  $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$  van een irrationaal getal  $\alpha$  gegeven door het recursieve algoritme  $x_0 = \alpha$ ,  $a_n = [x_n]$ ,  $x_{n+1} = 1/(x_n - a_n)$  voor  $n \geq 0$ ; hierbij is  $[x_n]$  het grootste gehele getal  $\leq x_n$ .

- Bepaal de kettingbreukontwikkeling van  $\alpha = \frac{1}{11}(6 + \sqrt{47})$  en laat zien dat deze periodiek is.
- Bepaal met behulp van het voorgaande onderdeel de kettingbreukontwikkeling van  $\sqrt{47}$ .

## Opgave 4

In deze opgave is, net als in het dictaat,  $\mathbb{N}$  de verzameling van de gehele getallen  $\geq 1$  en is  $\mu : \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$  de Möbius functie. Zij  $\lambda = \mu * \mu$  het convolutieproduct van  $\mu$  met zichzelf (t.a.v. de vermenigvuldiging in  $\mathbb{N}$ ).

Bewijs dat voor elke  $n \in \mathbb{N}$  met  $n > 1$  geldt:

$$\lambda(n) = 0 \quad \iff \quad \text{er is een } k \in \mathbb{N}, k > 1 \text{ zo dat } k^3 \mid n$$

EINDE

puntenverdeling:

Opgave 1: 20 pnt

Opgave 2: a 3, b 7, c 10, d 10 pnt

Opgave 3: a 15, b 10 pnt

Opgave 4: a 20, b 5 pnt