

Elementaire Getaltheorie

Deeltentamen, 5 nov 2012, 10-13 uur

Gebruik van aantekeningen, boeken, etc is niet toegestaan. Je kunt een eenvoudige calculator gebruiken om berekeningen uit te voeren als je wilt.

Tip: ook als je een onderdeel gemist hebt kun je het resultaat daarvan wel gebruiken in een volgend onderdeel.

Motiveer je antwoorden. Succes!

OPGAVEN

- (1 pt) Bepaal een oplossing $x, y \in \mathbb{Z}$ van $25x - 91y = 1$.
 - (1 pt) Bepaal de volledige oplossingsverzameling van $25x - 91y = 4$ in $x, y \in \mathbb{Z}$.
 - (0.5 pt) Los de congruentievergelijking $25x - 91y \equiv 4 \pmod{14}$ op in $x, y \in \mathbb{Z}$.
- De functie $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ wordt gegeven door $\psi(1) = 1$ en

$$\psi(n) = n \prod_{p \text{ priem}, p|n} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

Zij μ de Möbius functie gegeven door $\mu(n) = (-1)^t$ als n kwadraatvrij is en bestaat uit t verschillende priemfactoren, $\mu(1) = 1$ en $\mu(n) = 0$ in alle andere gevallen.

- (0.5 pt) Bewijs dat ψ een multiplicatieve functies is.
 - (1 pt) Bepaal het convolutieproduct $(\mu * \psi)(n)$ als n kwadraatvrij is.
 - (1 pt) Bepaal $(\mu * \psi)(n)$ voor willekeurige n en bepaal $(\mu * \psi)(10^{40})$.
- (1 pt) Bepaal een primitieve wortel modulo 23.
 - (1 pt) Zij p een oneven priemgetal en g een primitieve wortel modulo p . Bewijs dat $-g$ een primitieve wortel modulo p is precies dan als $p \equiv 1 \pmod{4}$.

4. (a) (1 pt) Voor welke oneven priemgetallen p is -2 een kwadraat-rest modulo p ?
- (b) (1 pt) Stel x is een oneven geheel. Bewijs dat $x^2 + 2$ deelbaar is door een priemgetal p met $p \equiv 3 \pmod{8}$.
- (c) (1 pt) Bewijs dat er oneindig veel priemgetallen van de vorm $p \equiv 3 \pmod{8}$ bestaan.