Herkansingstentamen Grondslagen van de Wiskunde, 21 april 2022, 11.30-14.30

DIT TENTAMEN BEVAT 5 OPGAVEN.
Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. Laten X, Y en Z oneindige verzamelingen zijn en $f : X \to Y$ een surjectieve functie. Bewijs: als $|Y| \leq |Z|$ en voor elke $y \in Y$ geldt $|f^{-1}(y)| \leq |Z|$, dan is $|X| \leq |Z|$.

Opgave 2. Laat X een verzameling zijn, L een welordening en $f : L \to X$ een surjectieve functie. We definiëren de volgende relatie op X: $x < y$ geldt precies dan als voor elke $l \in f^{-1}(y)$ er een $k < l$ is met $f(k) = x$.

Bewijs, dat deze relatie een welordening is op X.

Opgave 3. Stel T is een theorie met de volgende eigenschappen:

i) T heeft kwantoreliminatie.

ii) Voor elk tweetal modellen M_0, M_1 van T is er een model N van T zodat M_0 en M_1 beide isomorf zijn met een substructuur van N.

Bewijs, dat T volledig is.

Opgave 4. Construeer bewijsbomen voor de volgende uitspraken:

a) (3 pt) $\vdash \phi \vee \neg\phi$

b) (3 pt) $\phi \vee (\psi \vee \chi) \vdash (\phi \vee \psi) \vee \chi$

c) (4 pt) $\exists x \phi(x) \vdash \exists y \phi(y)$

Opgave 5. Ter herinnering: het regulariteitsaxioma van de verzamelingenleer zegt dat er voor elke niet-lege verzameling x een $y \in x$ is met $x \cap y = \emptyset$. Verder heet een verzameling x *transitief* als elk element van x een deelverzameling is van x. Bewijs de volgende twee uitspraken uit de axioma's van de verzamelingenleer:

a) (5 pt) Als $x \subseteq \{x\}$, dan is $x = \emptyset$.

b) (5 pt) Als x transitief is en $x \neq \emptyset$, dan geldt $x = \{\emptyset\}$ of $\{\emptyset\} \in x$.