Tentamen Grondslagen van de Wiskunde A

20 december 2021, 09:30–12:30

Dit tentamen bevat 5 opgaven; zie ook de ommezijde.
Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. Voor functies $\alpha, \beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zeggen we "β domineert α" (notatie: $\alpha \ll \beta$) als er voor elke $N \in \mathbb{N}$ een $k \in \mathbb{N}$ is zodat voor alle $n > k$ geldt:

$$\frac{\beta(n)}{\alpha(n)+1} > N$$

a) (6 punten) Laat $\alpha^0, \alpha^1, \ldots$ een rij functies $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zijn. Laat zien dat er een functie $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is zo dat $\alpha^i \ll \beta$ geldt voor alle i.

b) (4 punten) Stel dat A een verzameling van functies $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is zodat er voor elke functie $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ een $\beta \in A$ is met $\alpha \ll \beta$. Laat zien dat A niet aftelbaar is.

Opgave 2. Laat X een poset zijn. Onder een *bos* in X verstaan we een deelverzameling $B \subseteq X$ met de eigenschap dat voor alle $x \in B$ de verzameling $B_x = \{y \in B \mid y \leq x\}$ lineair geordend is (met de ordening van X).
Laat zien dat er een bos M in X is met de volgende eigenschap: voor elke $x \in X$ is er een $m \in M$ met $x \leq m$ of $m \leq x$.

[Hint: bewijs eerst, met behulp van het Lemma van Zorn, dat er een 'maximaal bos' bestaat. Leid dan daaruit de genoemde eigenschap af]

Opgave 3. Stel X is een poset, en $A \subset X$ is een deelverzameling met de eigenschap dat voor elk dalend rijtje $c_0 > c_1 > \cdots$ in X, er een $k \in \mathbb{N}$ is met $c_k \in A$.

a) (6 punten) Stel een deelverzameling $Y \subseteq X$ voldoet aan de volgende voorwaarden:

   i) $A \subseteq Y$

   ii) Voor alle $x \in X$ geldt: als $\{y \in X \mid y < x\} \subseteq Y$, dan $x \in Y$.

   Laat zien dat $Y = X$.

b) (4 punten) Is X een welordening? Motiveer je antwoord.

Opgave 4. In deze opgave beschouwen we de taal $L = \{\exp, m, <\}$ waar exp en m 1-plaatsige functiesymbolen zijn en $<$ een 2-plaatsig relatiesymbool is. We beschouwen de L-structuur $\mathbb{R}$, met $\exp^{\mathbb{R}}(x) = e^x$, $m^{\mathbb{R}}(x) = -x$ en $<^{\mathbb{R}}$ de gewone ordening op $\mathbb{R}$.

a) (3 punten) Definieer het getal 0 door een L-formule, d.w.z. geef een L-formule $\phi_0(x)$ die in $\mathbb{R}$ alleen waar is voor $x = 0$.

b) (3 punten) Definieer het getal 1 door een L-formule $\phi_1(x)$.

c) (4 punten) Definieer de kromme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ door een L-formule $\phi(x, y)$.

Opgave 5. We beschouwen de taal $L_{\mathbb{R}}$ van $\mathbb{R}$-vectorruimten: de taal heeft een constante 0, een functiesymbool + voor optelling van vectoren, en voor elke $r \in \mathbb{R}$ een functiesymbool f_r voor vermenigvuldiging van een vector met de scalar r. We hebben ook de theorie $T_{\mathbb{R}}$ van $\mathbb{R}$-vectorruimten, gegeven door de axioma's

$$
\begin{array}{ll}
f_r(0) = 0 & \forall xy(f_r(x + y) = f_r(x) + f_r(y)) \\
\forall x(f_1(x) = x) & \forall x(f_r(f_s(x)) = f_{rs}(x)) \\
\forall x(f_{r+s}(x) = f_r(x) + f_s(x)) &
\end{array}
$$

(Samen met de axioma's voor een abelse groep gegeven door 0 en +). Bewijs met behulp van de Compactheidsstelling dat er geen $L_{\mathbb{R}}$-formule $\phi(x, y)$ in twee vrije variabelen x en y is, die uitdrukt dat x en y lineair onafhankelijk zijn over $\mathbb{R}$, met andere woorden: die zo is dat voor elke $\mathbb{R}$-vectorruimte V en elk tweetal elementen v, w van V geldt: $V \models \phi(v, w)$ precies als v en w in V lineair onafhankelijk zijn.
[Hint: gesteld zo'n formule $\phi(x, y)$ bestond; beschouw dan de ontkenning $\neg\phi(x, y)$. Beschouw een uitbreiding van de taal met twee nieuwe constanten, en formuleer een geschikte uitbreiding van de theorie $T_{\mathbb{R}}$]