

Tentamen functionaalanalyse 2 februari 2022

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam.
- Schrijf met een (naar voorkeur blauwe) pen, niet met potlood.
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel in het vervolg uiteraard wel gebruiken.
- Boek(en), cursusmateriaal en aantekeningen mogen gebruikt worden, rekenmachines mogen niet gebruikt worden.
- Alle deelopgaves tellen even zwaar.
- *SUCCES!*

1. Zij H een separabele Hilbertruimte met compleet orthonormaalstelsel $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en $T : H \rightarrow H$ de d.m.v.

$$Te_{2k-1} = \cos(k) e_{2k-1} + 4\sqrt{3} \sin(k) e_{2k-1} - 7 \sin(k) e_{2k}$$

$$Te_{2k} = 7 \sin(k) e_{2k-1} + \cos(k) e_{2k} - 4\sqrt{3} \sin(k) e_{2k}$$

gedefinieerde begrensde operator.

- (i) Geef de matrix $A_k \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ aan die T t.o.v. e_{2k-1} en e_{2k} op de door deze vectoren opgespanne invariante deelruimte representeert en bereken de eigenwaarden van A_k . Is A_k diagonaliseerbaar?
- (ii) Ga na of T een normale operator is.

(iii) Is T een compacte operator? Bepaal ook de Hilbert–Schmidt norm van T .

(iv) Kun je \sqrt{T} berekenen?

(v) Splits het spectrum van T in puntspectrum, continu spectrum en restspectrum.

Hint: $\pi \notin \mathbb{Q}$.

(bonus) Welke spectraalwaarden zijn essentiël?

2. Zij H een Hilbertruimte, $T \in L(H)$ en $T = UA$ een polaire decompositie.

(i) Laat zien dat T compact als A compact is.

(ii) Geef een voorbeeld met T compact maar A niet compact.

(iii) Met welke eis aan de (constructie van de) polaire decompositie impliceert T compact dat ook A compact moet zijn?

(iv) Voor A zelfgeadjungeerd toon aan dat A^2 dan en slechts dan compact is als A compact is en generaliseer naar A^n , $n \geq 3$.

3. Gebruik op ℓ^2 het compleet orthonormaalstelsel $((\delta_{kn})_{k \in \mathbb{N}})_{n \in \mathbb{N}}$ en definieer $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ d.m.v. de door

$$t_{kl} = \frac{|k-l|}{k^2 l^2} \quad \text{voor alle } k, l \in \mathbb{N}$$

gegeven oneindige matrix.

(i) Laat zien dat T een continue lineaire afbeelding is.

(ii) Ga na of T zelfgeadjungeerd is.

(iii) Is T een compacte operator?

(iv) Toon aan dat T een Hilbert–Schmidt operator is.