Tentamen
Numerieke Wiskunde (WISB251)

Woensdag 13 April 2022, 13:30-16:30

NB. het maximum aantal te behalen punten = 100

Vraag 1 (*maximaal 10 punten waard*)

We willen weten wat de afrondfout is in de berekening van $y = \frac{3}{x} + \frac{1}{5}$.
Hierbij nemen we aan dat x een zwevende-komma-getal is.

a) Laat zien dat de *relatieve fout* in deze berekening kan worden begrensd door

$$\frac{|\mathrm{fl}(y) - y|}{|y|} \leq \frac{2\eta}{1-2\eta}\frac{|x|+15}{|x+15|},$$

waarbij η de afrondeenheid is.

b) Voor welke waarde(n) van x is deze berekening problematisch? En waarom?

Vraag 2 (*maximaal 15 punten waard*)

We beschouwen de volgende iteratiemethode:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_k) := (I - \gamma A)\,\mathbf{x}_k + \gamma \mathbf{b}, \qquad \gamma > 0.$$

Hierin is A de matrix $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{b}$ de vector $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Bepaal het vaste "punt" $\mathbf{x}_*$ van de vectorfunctie $\mathbf{g}$.

b) Laat zien dat deze iteratiemethode convergeert naar $\mathbf{x}_*$ voor $0 < \gamma < \frac{1}{2}$.

c) Geef (bereken) de waarde van γ waarvoor de iteratie het snelst convergeert.

Vraag 3 (*maximaal 15 punten waard*)

We onderzoeken de volgende iteratiemethode (met als vaste punt $x_* = \alpha^{1/4}$):

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) := x_k - \frac{x_k^4 - \alpha}{2\alpha^3}, \qquad k \geq 0, \qquad \alpha > 1.$$

We kiezen de startwaarde als volgt: $x_0 \in (0, \alpha)$.

a) Laat zien dat deze iteratie convergeert naar x_*.

b) Hoe hangt de convergentie snelheid af van α? (lineair, kwadratisch, kubisch, ...?)

Vraag 4 (*maximaal 20 punten waard*)

We bekijken de volgende benadering van de tweede afgeleide van een functie in het punt x:

$$f''(x) \approx \frac{2f(x-h) - 3f(x) + f(x+2h)}{3h^2} \quad \text{met stapgrootte } h > 0.$$

a) Laat zien dat de benaderingsfout wordt gegeven door $cf'''(\xi)h^q$ met $\xi \in [x-h, x+2h]$. Bepaal dus ook de constanten c en q.

b) We willen nu de tweede afgeleide van de functie $f(x) = \sin(5x)$ gaan benaderen. Hoe groot mag de stapgrootte h maximaal zijn zodat de fout gegarandeerd kleiner is dan een vooraf opgegeven $\epsilon > 0$?

Vraag 5 (*maximaal 20 punten waard*)

De midpuntregel benadert de integraal I als volgt:

$$I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx T_1 = f(\frac{1}{2}).$$

Bekend (dus gegeven) is dat voor de fout $R_1 = I - T_1$ geldt: $R_1 = \frac{f''(\eta_1)}{24}$, voor een zekere $\eta_1 \in [0, 1]$.
De fout bij het $2\times$ toepassen van de midpuntregel noemen we R_2 en is dus gelijk aan $I - T_2$.

a) Laat zien dat $R_2 = \frac{f''(\eta_2)}{96}$, voor zekere $\eta_2 \in [0, 1]$.

b) Bepaal de coëfficiënten c_1 en c_2 zòdanig dat de nieuwe benadering $T_3 = c_1T_1 + c_2T_2$ exact is voor polynomen van (minstens) graad 2.

vraag 6 (*maximaal 20 punten waard*)

De θ -methode voor het numeriek oplossen van de differentiaalvergelijking $y'(t) = f(y(t))$ luidt:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t\,(\theta f(y_n) + (1-\theta)f(y_{n+1}))\,, \quad \theta \geq 0.$$

a) Welke bekende methoden vinden we voor, respectievelijk, $\theta = 0$ en $\theta = 1$?

b) Geef het stabiliteitscriterium voor deze methode.

c) Schets het stabiliteitsgebied in het complexe vlak voor $\theta = 0$, $\theta = 1$ en $\theta = \frac{1}{2}$.

d) Geef een uitdrukking voor de lokale afbreekfout van deze methode voor $\theta = \frac{1}{2}$ en $\theta \neq \frac{1}{2}$.