Hertentamen
Numerieke Wiskunde (WISB251)

Woensdag 6 juli 2022, 13:30-16:30

NB. het maximum aantal te behalen punten = 100

Vraag 1 (*maximaal 20 punten waard***)**

In deze vraag beschouwen we de afrondfout bij de berekening van $y = x^2 - 2x$. Je mag aannemen dat x een zwevende-komma-getal is.

a) Laat zien dat de *relatieve fout* kan worden begrensd door

$$\frac{|\mathrm{fl}(y) - y|}{|y|} \leq \frac{2\eta}{1-2\eta}\frac{|x|+2}{|x-2|},$$

waarbij η de afrond-eenheid is.

b) Voor welke waarde(n) van x is deze berekening problematisch?

Vraag 2 (*maximaal 20 punten waard***)**

We willen de nulpunten vinden van de functie $f(x) = x^3 - x^2$.

a) Hoe snel convergeert de methode van Newton-Raphson naar het nulpunt $x = 1$, als we daar in de buurt starten? Dezelfde vraag voor het andere nulpunt $x = 0$.

b) Wat zijn de vaste punten van de vastepunt-iteratie $x_{k+1} = x_k^{3/2}$ en voor welke beginwaarden $x_0 \geq 0$ worden deze in de limiet $k \to \infty$ bereikt? Geef ook aan hoe snel de convergentie is.

Vraag 3 (*maximaal 20 punten waard***)**

We benaderen de afgeleide van de functie f in het punt x_0 als volgt:

$$f'(x_0) \approx P_2'(x_0) = \frac{f(x_0+2h) + 3f(x_0) - 4f(x_0-h)}{6h}.$$

a) Stel het interpolatiepolynoom P_2 met steunpunten $\{x_0 - h, x_0, x_0 + 2h\}$ op en laat zien dat dit tot de gegeven benadering van de afgeleide van f in x_0 leidt.

b) Laat zien dat de fout is gegeven door

$$f'(x_0) - P_2'(x_0) = -\tfrac{1}{3}h^2 f'''(\xi), \quad \text{met } \xi \in [x_0 - h, x_0 + 2h].$$

c) Voor $f(x) = \mathrm{e}^x$ en een $\epsilon > 0$, bepaal de stapgrootte h zodat $|f'(x_0) - P_2'(x_0)| \leq \epsilon$ voor alle $x_0 \in [0, 1]$.

Vraag 4 (*maximaal 20 punten waard*)

In deze vraag benaderen we integralen van de vorm

$$I = \int_a^b x\; f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{met } 0 \leq a < b.$$

.

a) Leid een benadering voor I af door een lineaire benadering voor $f(x)$ te gebruiken. Geef je antwoord in termen van $f(a)$ en $f(b)$.

b) Laat zien dat de fout E in deze benadering kan worden uitgedrukt als

$$E = \frac{1}{12}(b-a)^3(b+a)f''(\xi), \quad \text{met } \xi \in [a, b].$$

c) Geef ook de foutterm voor de trapeziumregel, toegepast op de integraal I en laat zien dat deze benadering – in tegenstelling tot de benadering in onderdeel b) – in het algemeen alleen exact is, als $f(x)$ een constante functie is.

Vraag 5 (*maximaal 20 punten waard*)

Gegeven is de volgende methode om de differentiaalvergelijking $u'(t) = f(u(t))$ numeriek op te lossen:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\Big(f(u_n) + f\big(u_n + \tfrac{2h}{3} f(u_n)\big)\Big),$$

waarbij u_n een benadering is van $u(t_n) = u(nh)$.

a) Laat zien dat de afbreekfout gegeven wordt door:

$$C\; h^2 + \mathcal{O}(h^3).$$

Bepaal dus ook de constante C!

b) Bepaal het stabiliteitsgebied van deze methode.