Tentamen Inleiding Topologie, 3 februari 2021

Schrijf leesbaar. Als je een deel van een opgave niet kunt oplossen, kun je het resultaat niettemin bij de volgende delen gebruiken. Veel succes!

Opgave 1 (4 punten)**.** *Zij $\mathcal{T}$ de verzameling*

$$\{[a,b] : a < b \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{\varnothing\}$$

van deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. Is $\mathcal{T}$ een topologie? Geef een bewijs.

Opgave 2 (11 punten)**.** *Bekijk de verzamelingen*

$$X = (-1,0) \cup (0,1) \subset \mathbb{R}$$

en

$$Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d((0,0),(x,y)) \leq 1 \ \text{ of } \ d((2,0),(x,y)) \leq 1.\}$$

1. *Schets X en Y. (1 pt)*
2. *Zijn X en Y homeomorf? Geef een bewijs. (4 pt)*
3. *Bereken voor X en Y het inwendige en de afsluting. Geef voor alle deze vier ruimtes aan of ze*
   - *samenhangend en/of*
   - *compact en/of*
   - *eerstaftelbaar*

   zijn. Je hoeft bij deze deelopgave geen bewijzen te geven. (6 pt)

Opgave 3 (6 punten)**.** *Laat $(X, \mathcal{T}_X)$ en $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische ruimtes zijn en $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ een open dekking van X. Zij $f\colon X \to Y$ een afbeelding zodat de beperking $f|_{U_i}\colon U_i \to Y$ continu is voor iedere $i \in I$ (waar we U_i met de deelruimtetopologie bekijken). Bewijs dat f continu is.*

Opgave 4 (7 punten)**.** *Geef een voorbeeld van een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ zodat er voor iedere $x \in X$ een omgeving U bestaat zodat U en $\mathbb{R}^2$ homeomorf zijn, maar X niet Hausdorff is. Geef een bewijs. (Hint: Neem een quotient van twee kopieën van $\mathbb{R}^2$.)*

Opgave 5 (10 punten)**.** *Zij K de kleinfles. Beantwoord iedere vraag met ja of nee en geef een bewijs.*

1. *Bestaat er een continue inbedding $g\colon S^1 \to K$ zodat $K \setminus g(S^1)$ samenhanged is? (5 pt)*
2. *Bestaat er een surjectieve continue afbeelding $f\colon [0,1] \to K$? (5 pt)*

Opgave 6 (12 punten)**.**

1. *Bewijs dat er geen inbedding $S^1 \to \mathbb{R}$ bestaat. (6 pt)*
2. *Bewijs dat iedere injective continue afbeelding $S^1 \to S^1$ een homeomorfisme is. (6 pt)*