Hertentamen Inleiding Topologie, 21 april 2021

Veel succes!

Opgave 1 (6 punten). *Bekijk de verzamelingen*

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$$

en

$$Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1.\}$$

met de deelruimtetopologie van de Euclidische topologie op $\mathbb{R}^2$.

1. *Schets* X *en* Y. *(1 pt)*
2. *Zijn* X *en* Y *homeomorf? Geef een bewijs. (5 pt)*

Opgave 2 (7 punten). *Zij* $X = \{c, o\}$ *een verzameling met twee elementen. Bekijk de topologie* $\mathcal{T}_X = \{\varnothing, \{o\}, X\}$ *op* X. *Bekijk* $X \times X$ *met de producttopologie.*

1. *Noem alle open deelverzamelingen van* $X \times X$. *(3pt)*
2. *Zij* $A = \{(c,o)\} \subset X \times X$. *Bepaal het inwendige en de afsluiting van* A. *(4pt)*

Opgave 3 (12 punten). *Geef een voorbeeld van een topologische ruimte die*

1. *tweedstaftelbaar, maar niet Hausdorff is (4pt);*
2. *Hausdorff, maar niet tweedstaftelbaar is (4pt);*
3. *compact, maar niet samenhangend is (4pt).*

Geef in ieder voorbeeld een bewijs voor de eigenschappen (tenzij al bekend uit het hoorcollege).

Opgave 4 (7 punten). *Zij* $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *de één-punt-compactificatie van* $\mathbb{R}$ *met de topologie*

$$\mathcal{T}^+ = \mathcal{T}_{\text{eucl}} \cup \{\mathbb{R}^+ \setminus K : K \subset \mathbb{R} \text{ compact}\},$$

waar $\mathcal{T}_{\text{eucl}}$ *de Euclidische topologie op* $\mathbb{R}$ *is.*

Bewijs dat er geen continue functie $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *is met* $f(x) = x$ *voor alle* $x \in \mathbb{R}$.

Opgave 5 (9 punten)**.**

1. *Geef een voorbeeld van een inbedding* $i\colon S^1 \to T$ *van een cirkel naar een torus zodat* $T \setminus i(S^1)$ *niet samenhangend is. (4pt)*

2. *Geef voorbeelden van inbeddingen* $i, j\colon S^1 \to T$ *zodat* $T \setminus i(S^1)$ *en* $T \setminus j(S^1)$ *niet homeomorf met elkaar zijn. (5pt)*

Geef voor ieder voorbeeld een bewijs.

Opgave 6 (9 punten)**.** *Zij* $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ *een positief getal en* $(X, \mathcal{T})$ *een compacte topologische ruimte met een inbedding* $\Phi\colon X \to \mathbb{R}^N$*, waar* $\mathbb{R}^N$ *de euclidische topologie heeft. Bewijs dat* $\Phi(X) \subset \mathbb{R}^N$ *niet open kan zijn als* X *niet-leeg is.*