Docent: Yu.A. Kuznetsov
Assistants: D. Dragutinovic, A. Rapoport, A.M. Biletta, S. van Nigtevecht
A. van Ooijen, A. Papatheodorou

UITWERKING TENTAMEN DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WISB231)

14 april 2022, 13:30 – 16:30 uur

Opgave 1 [20 pt] Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & -4 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a) [5 pt] Vind $\det(e^{xA})$.

$$\det(e^{xA}) = e^{\mathrm{Sp}(xA)} = e^{x\mathrm{Sp}(A)} = e^{-3x}.$$

(b) [10 pt] Bereken e^{xA}.

De karakteristieke vergelijking van A is

$$\det(A - \lambda E) \;=\; -(\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1) \;=\; -(\lambda+1)^3 \;=\; 0$$

met één drievoudige wortel $\lambda_1 = -1$. De matrix A heeft dus één eigenwaarde $\lambda_1 = -1$ met de algebraische multipliciteit $m_1 = 3$. Zij

$$B \;=\; A - \lambda_1 E \;=\; A + E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Dan zijn er twee methoden om e^{xA} te berekenen.

Methode I: Er geldt

$$B^2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad B^3 = 0,$$

dus is B nilpotent met nilpotentiegraad 3. Hieruit volgt dat

$$e^{xA} = e^{x(B-E)} = e^{-x}e^{xB} = e^{-x}\left(E + xB + \frac{x^2}{2}B^2\right)$$

ofwel

$$e^{xA} = e^{-x}\begin{pmatrix} 1 + 3x - \dfrac{3x^2}{2} & x & -x + \dfrac{x^2}{2} \\ -3x & 1 & x \\ 9x - \dfrac{9x^2}{2} & 3x & 1 - 3x + \dfrac{3x^2}{2} \end{pmatrix}$$

Methode II: Er geldt rank $B = 2$, waaruit blijkt dat $\dim \operatorname{Ker} B = 3-2 = 1$ en dus bestaat er één Jordan-keten van lengte 3 voor de eigenwaarde $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{cases} Bv &= 0, \\ Bu &= v, \\ Bw &= u. \end{cases}$$

Neem een willekeurige

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

dan geldt

$$u = Bw = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3w_1 + w_2 - w_3 \\ -3w_1 + w_3 \\ 9w_1 + 3w_2 - 3w_3 \end{pmatrix}$$

en

$$v = Bu = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3w_1 + w_2 - w_3 \\ -3w_1 + w_3 \\ 9w_1 + 3w_2 - 3w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3w_1 + w_3 \\ 0 \\ -9w_1 + 3w_3 \end{pmatrix} = (-3w_1 + w_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Het blijkt dat $v \in \mathbb{R}^3$ voldoet aan $Bv = 0$ ofwel

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = -(3w_1 + w_3) \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

voor alle (w_1, w_2, w_3). Met $w_1 = 0, w_2 = w_3 = 1$ krijgen we de Jordan-keten

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Deze vectoren zijn lineair onafhankelijk en de matrix

$$S = (v \mid u \mid w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

is niet singulier met $\det S = 1$ en

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Een fundamentale matrix voor $y' = Ay$ is

$$\Psi(x) = \mathrm{e}^{-x} \left(v \;\middle|\; u + xv \;\middle|\; w + xu + \frac{x^2}{2} v \right) = \mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} 1 & x & \dfrac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & 1 + x \\ 3 & 3x & 1 + \dfrac{3x^2}{2} \end{pmatrix}$$

met $\Psi(0) = S$. Dus

$$\mathrm{e}^{xA} = \Psi(x)[\Psi(0)]^{-1} = \Psi(x) S^{-1} = \mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} 1 + 3x - \dfrac{3x^2}{2} & x & -x + \dfrac{x^2}{2} \\ -3x & 1 & x \\ 9x - \dfrac{9x^2}{2} & 3x & 1 - 3x + \dfrac{3x^2}{2} \end{pmatrix}$$

Opgave 2 [20pt] Bewijs dat het inhomogene randwaardeprobleem

$$\begin{cases} y''(x) = f(x), & x \in [0, 1], \\ a_0 y(0) + b_0 y'(0) = \alpha, \\ a_1 y(1) + b_1 y'(1) = \beta, \end{cases} \tag{2}$$

een eenduidige oplossing heeft voor willekeurige functie $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ en $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dan en slechts dan als

$$a_0 a_1 + a_0 b_1 - b_0 a_1 \neq 0. \tag{3}$$

Het homogene randwaardeprobleem dat bij (2) hoort is

$$\begin{cases} y''(x) &=& 0, \quad x \in [0,1], \\ a_0 y(0) + b_0 y'(0) &=& 0, \\ a_1 y(1) + b_1 y'(1) &=& 0. \end{cases} \tag{4}$$

De karakteristieke vergelijking voor $y'' = 0$ is $\lambda^2 = 0$ met één dubbele wortel $\lambda_1 = 0$. De algemene oplossing van $y''(x) = 0$ is dus $y(x) = A\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + Bx\mathrm{e}^{\lambda_1 x} = A + Bx$ met

$$y(0) = A, \quad y'(0) = B, \quad y(1) = A + B, \quad y'(1) = B.$$

De oplossing voldoet aan de randvoorwaarden als

$$\begin{cases} a_0 A + b_0 B &=& 0, \\ a_1(A+B) + b_1 B &=& 0, \end{cases}$$

ofwel

$$\begin{cases} a_0 A + b_0 B &=& 0, \\ a_1 A + (a_1 + b_1) B &=& 0. \end{cases} \tag{5}$$

Het homogene lineaire stelsel (5) bezit alleen de triviale oplossing $A = B = 0$ als zijn matrix niet-singulier is, d.w.z.

$$\det \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & a_1 + b_1 \end{pmatrix} = a_0 a_1 + a_0 b_1 - b_0 a_1 \neq 0.$$

Wegens *Het Alternatief van Fredholm*, heeft dan het inhomogene randwaardeprobleem (2) een eenduidige oplossing voor willekeurige functie $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ en $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Opgave 3 [50 pt] Beschouw het stelsel differentiaalvergelijkingen in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{q} &=& p\,, \\ \dot{p} &=& -(q^2 + p^2)q. \end{cases} \tag{6}$$

(a) [10 pt] Laat zien dat de functie

$$H(q,p) = (q^2 + p^2 - 1)\exp(q^2) \tag{7}$$

een *constante van beweging* is voor (6), d.w.z. voor iedere oplossing van (6) geldt

$$H(q(t), p(t)) = E$$

met constante $E = H(q(0), p(0))$.

We hebben

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(q,p)}{\partial q} &= 2\mathrm{e}^{q^2}(q^2 + p^2)q, \\ \frac{\partial H(q,p)}{\partial p} &= 2\mathrm{e}^{q^2} p, \end{aligned}$$

zodat langs de oplossingen van (6) geldt

$$\frac{d}{dt} H(q,p) = \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} = 2\mathrm{e}^{q^2}(q^2 + p^2)qp - 2\mathrm{e}^{q^2}(q^2 + p^2)pq \;\equiv\; 0.$$

Dus hangt $H(q(t), p(t))$ niet af van de tijd en is gelijk aan $E := H(q(0), p(0))$.

(b) [10 pt] Bewijs dat (6) dezelfde *banen* heeft als het Hamilton-stelsel

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{q} & = & \dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p}, \\ \dot{p} & = & -\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial q}, \end{array}\right. \tag{8}$$

met de Hamilton-functie (7).

Het Hamilton-stelsel (8) met de Hamilton-functie (7) is

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{q} & = & 2\mathrm{e}^{q^2}p\,, \\ \dot{p} & = & -2\mathrm{e}^{q^2}(q^2+p^2). \end{array}\right. \tag{9}$$

De differentiaalvergelijking voor de baan van (9), die door het punt $(q_0,p_0)\in\mathbb{R}^2$ met $p_0\neq 0$ gaat, is

$$\frac{dp}{dq} = -\frac{q^2+p^2}{p}, \quad p(q_0)=p_0.$$

Precies dezelfde vergelijking beschrijft lokaal de baan van (6), die door het punt $(q_0,p_0)\in\mathbb{R}^2$ met $p_0\neq 0$ gaat. Ook de banen van (9) en (6), die door het punt $(q_0,0)\in\mathbb{R}^2$ met $q_0\neq 0$ gaan, voldoen lokaal aan dezelfde vergelijking:

$$\frac{dq}{dp} = -\frac{p}{q^2+p^2}, \quad q(0)=q_0.$$

Ten slotte, is het punt $(q_0,p_0)=(0,0)$ een rustpunt in beide stelsels (9) en (6).

(c) [5 pt] Bewijs dat (8) slechts één rustpunt heeft.

Ieder rustpunt van (9) voldoet aan het stelsel

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\mathrm{e}^{q^2}p & = & 0, \\ 2\mathrm{e}^{q^2}(q^2+p^2) & = & 0, \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} p & = & 0, \\ q^2+p^2 & = & 0, \end{array}\right.$$

met als enige oplossing $q_0=p_0=0$.

(d) [15 pt] Laat zien dat iedere oplossing $t\mapsto(q(t),p(t))$ van (6) met beginvoorwaarden $(q_0,p_0)\in\mathbb{R}^2$ zodat $q_0^2+p_0^2>0$ periodiek is. Vind de periode van de oplossing met $q_0=1, p_0=0$.

Als de niveau-verzameling $H(p,q)=E$ niet-leeg en niet één punt is, is het de vereniging van twee spiegel-symmetrische krommes:

$$p=\pm\sqrt{h(q^2)} \quad \text{met} \quad h(q^2)=1-q^2+E\mathrm{e}^{-q^2}.$$

De niveau-verzamelling is een gesloten kromme, als de functie

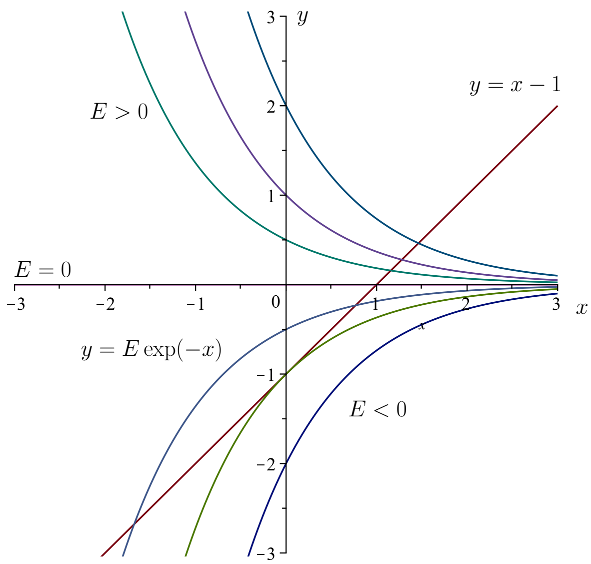
$$h(x)=1-x+E\mathrm{e}^{-x}$$

één positieve wortel heeft, d.w.z. de vergelijking

$$x-1=E\mathrm{e}^{-x}$$

een oplossing $x>0$ bezit. In dit geval is de functie $h(q^2)$ positief tussen twee nulpunten $q_{1,2}=\mp\sqrt{x}$.

Door het schetsen van de grafieken van de functies $y=x-1$ en $y=E\mathrm{e}^{-x}$ met $E>0, E=0$, en verschillende $E<0$, wordt het evident dat we één snijpunt van die grafieken hebben als $E\geq 0$, twee snijpunten (waarvan slechts één positief is) als $-1<E<0$, één raakpunt als $E=-1$, and geen snijpunten als $E<-1$ (zie Figuur 1). Dus zijn de niveau krommen $H(q,p)=E$ gesloten en corresponderen met periodieke banen dan en slechts dan als $E>-1$. De waarde $E=-1$ geeft het rustpunt $q_0=p_0=0$.



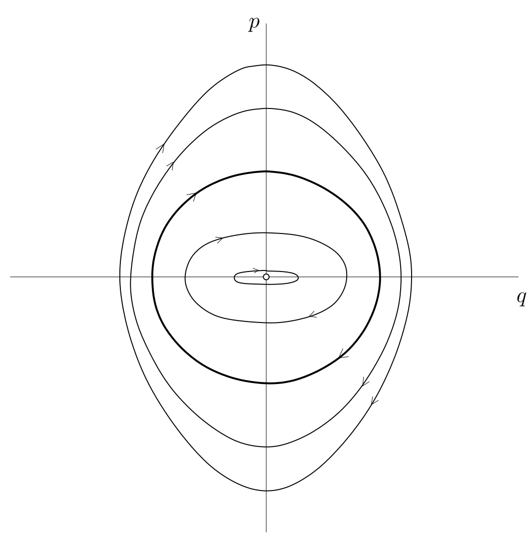
Figuur 1: De grafieken van $y = x - 1$ en $y = E\mathrm{e}^{-x}$ met $E > 0, E = 0$, en $E < 0$.

De oplossing met $(q_0, p_0) = (1, 0)$ ligt in de niveau-verzamelling $H(q, p) = 0$, d.w.z. $q^2 + p^2 = 1$. Deze oplossing $(q(t), p(t))$ voldoet aan het stelsel

$$\begin{cases} \dot{q} &= \quad p\,, \\ \dot{p} &= -q, \end{cases} \tag{10}$$

dat een harmonische oscillator beschrijft waarvoor $\ddot{q} + q = 0$. De oplossing is dus $(q(t), p(t)) = (\cos t, -\sin t)$ met periode $T = 2\pi$.

(e) [10 pt] Schets het faseplaatje behorend bij (8) (en dus (6)) in het (q, p)-vlak. Let op het rustpunt en andere speciale banen. Zet ook pijltjes!



Figuur 2: Het faseplaatje van (8).

Opgave 4 [10 pt] Zij $y(x)$ een oplossing van het beginwaardeprobleem

$$\frac{dy}{dx} = \sin(y^2), \quad y(0) = 0.$$

Vind alle a_n met $n \leq 6$ in de reeksontwikkeling $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Methode I: De autonome differentiaalvergelijking $y' = \sin(y^2)$ heeft een rustpunt $y = 0$. Het beginwaardeprobleem heeft dus de constante oplossing $y(x) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. In de reeksontwikkeling

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv 0$$

zijn alle coefficienten $a_n = 0$.

Methode II: Wegens $y(0) = a_0 = 0$, kunnen we schrijven

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + O(x^7).$$

Dan geldt

$$\begin{aligned} y' &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + 6a_6 x^5 + O(x^6), \\ \sin(y^2) &= a_1^2 x^2 + 2a_1 a_2 x^3 + (2a_1 a_3 + a_2^2) x^4 + (2a_1 a_4 + 2a_2 a_3) x^5 + O(x^6) \end{aligned}$$

Dus

$$\begin{cases} a_1 &= 0, \\ 2a_2 &= 0, \\ 3a_3 &= a_1^2, \\ 4a_4 &= 2a_1 a_2, \\ 5a_5 &= 2a_1 a_3 + a_2^2, \\ 6a_6 &= 2a_1 a_4 + 2a_2 a_3. \end{cases}$$

Hieruit volgt

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{1}{3} a_1^2 = 0, \quad a_4 = \frac{1}{2} a_1 a_2 = 0, \quad a_5 = \frac{1}{5}(2a_1 a_3 + a_2^2) = 0, \quad a_6 = \frac{1}{3}(a_1 a_4 + a_2 a_3) = 0.$$

Bonus Opgave [20 pt] Laat zien dat het homogene randwaardeprobleem

$$\begin{cases} u''(x) + q(x)u'(x) - u(x) = 0, & x \in [0, 1], \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{11}$$

alleen de nuloplossing bezit voor een willekeurige functie $q \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$.

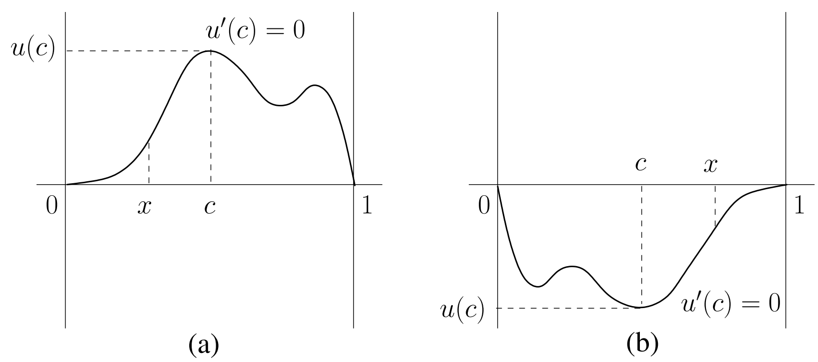
Neem een oplossing $u \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$ van (11). Stel dat $u(x) > 0$ voor een x met $0 < x < 1$. Dan heeft de oplossing een positieve *maximum* in een punt $x = c$ met $0 < c < 1$, zo dat $u(c) > 0$ en $u'(c) = 0$ (zie Figuur 3(a)). Maar

$$u''(c) = u(c) - q(c)u'(c) = u(c) > 0,$$

zo dat we een *minimum* moeten hebben, een tegenspraak.
Nu stel dat $u(x) < 0$ voor een x met $0 < x < 1$. Dan heeft u een negatieve *minimum* in een punt $x = c$ met $0 < c < 1$, zo dat $u(c) < 0$ en $u'(c) = 0$ (zie Figuur 3(b)). In dit geval geldt dat

$$u''(c) = u(c) - q(c)u'(c) = u(c) < 0,$$

zodat we een *maximum* moeten hebben, weer een tegenspraak. Dus is $u(x) = 0$ voor alle $x \in [0, 1]$.



Figuur 3: Onmogelijke oplossingen van (11).