Tentamen Differentiaalvergelijkingen (WISB231), 14 april 2022, 13:30-16:30

Dit tentamen bestaat uit vier reguliere opgaven en één bonus opgave. Maak iedere opgave op een apart vel. Het is bij dit tentamen niet toegestaan om een boek, aantekeningen, mobiele telefoon, laptop of een grafische rekenmachine te gebruiken. Vergeet niet op elk ingeleverd vel uw voor- en achternaam en studentnummer te schrijven. Motiveer uw antwoorden. Succes!

Opgave 1 [20 pt] Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & -4 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a) [5 pt] Vind $\det(e^{xA})$. (b)[15 pt] Bereken e^{xA}.

Opgave 2 [20pt] Bewijs dat het inhomogene randwaardeprobleem

$$\begin{cases} y''(x) &= f(x), \quad x \in [0,1], \\ a_0 y(0) + b_0 y'(0) &= \alpha, \\ a_1 y(1) + b_1 y'(1) &= \beta, \end{cases} \tag{2}$$

een eenduidige oplossing heeft voor willekeurige functie $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ en $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dan en slechts dan als

$$a_0 a_1 + a_0 b_1 - b_0 a_1 \neq 0. \tag{3}$$

Opgave 3 [50 pt] Beschouw het stelsel differentiaalvergelijkingen in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{q} &= p\,, \\ \dot{p} &= -(q^2+p^2)q. \end{cases} \tag{4}$$

(a) [10 pt] Laat zien dat de functie

$$H(q,p) = (q^2+p^2-1)\exp(q^2) \tag{5}$$

een *constante van beweging* is voor (4), d.w.z. voor iedere oplossing van (4) geldt

$$H(q(t),p(t)) = E$$

met constante $E = H(q(0),p(0))$.

(b) [10 pt] Bewijs dat (4) dezelfde *banen* in $\mathbb{R}^2$ heeft als het Hamilton-stelsel

$$\begin{cases} \dot{q} &= \dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p}, \\ \dot{p} &= -\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial q}, \end{cases} \tag{6}$$

met de Hamilton-functie (5).

Z.O.Z.

(c) [5 pt] Bewijs dat (4) slechts één rustpunt heeft.

(d) [15 pt] Laat zien dat iedere oplossing $t \mapsto (q(t), p(t))$ van (4) met beginvoorwaarden $(q_0, p_0) \in \mathbb{R}^2$ zodat $q_0^2 + p_0^2 > 0$ periodiek is. Vind de periode van de oplossing met $q_0 = 1, p_0 = 0$.

(e) [10 pt] Schets het faseplaatje behorend bij (4) in het (q, p)-vlak. Zet ook pijltjes!

Opgave 4 [10 pt] Zij $y(x)$ een oplossing van het beginwaardeprobleem

$$\frac{dy}{dx} = \sin(y^2), \quad y(0) = 0.$$

Vind alle a_n met $n \leq 6$ in de reeksontwikkeling $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Bonus Opgave [20 pt] Laat zien dat het homogene randwaardeprobleem

$$\begin{cases} u''(x) + q(x)u'(x) - u(x) &= 0, \quad x \in [0, 1], \\ u(0) = u(1) &= 0, \end{cases} \tag{7}$$

alleen de nuloplossing bezit voor een willekeurige functie $q \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$.