Hertentamen Differentiaalvergelijkingen (WISB231), 5 juli 2022, 8:30-11:30

Dit hertentamen bestaat uit vier opgaven. Maak iedere opgave op een apart vel. Het is bij dit tentamen niet toegestaan om een boek, dictaat, aantekeningen, mobiele telefoon, laptop of een grafische rekenmachine te gebruiken. Vergeet niet op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer te schrijven. Motiveer uw antwoorden. Succes!

Opgave 1 [20 pt] Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a) [5 pt] Vind $\det(e^{xA})$. (b)[15 pt] Bereken e^{xA}.

Opgave 2 [20 pt] Beschouw op $[0, \pi]$ het randwaardeprobleem

$$y''(x) + y(x) = 2x - \pi, \quad y(0) = y(\pi) = 0. \tag{2}$$

Hoeveel oplossingen heeft (2)?

Opgave 3 [30 pt] Beschouw de volgende differentiaalvergelijking

$$\ddot{q} = -\frac{\partial U(q, \mu)}{\partial q}$$

met $U(q, \mu) = \frac{1}{3}q^3 + \mu q$ waarin $\mu \in \mathbb{R}$. Na het introduceren van $v = \dot{q}$ is de vergelijking equivalent aan het stelsel

$$\begin{cases} \dot{q} &= v \\ \dot{v} &= -(q^2 + \mu) \end{cases} \tag{3}$$

in het (q, v)-vlak.

(a) [15 pt] Bepaal alle rustpunten van (3) en hun stabiliteit voor

(i) $\mu < 0$; (ii) $\mu = 0$; (iii) $\mu > 0$.

Hint: Voor $\mu = 0$ vind alle beginvoorwaarden (q_0, v_0) zodat

$$\lim_{t \to \infty} (q(t), v(t)) = (0, 0).$$

(b) [15 pt] Schets de faseplaatjes behorende bij (3) voor de waarden van μ in deel (a). Let op rustpunten en andere speciale banen. Zet ook pijltjes!

Z.O.Z.

Opgave 4 [30pt] Beschouw de differentiaalvergelijking

$$xy'' - 2\alpha xy' + 2y = 0 \tag{4}$$

met parameter $\alpha > 0$.

(a) [15 pt] Laat zien dat als

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

een oplossing is van (4), dan geldt $a_0 = 0$ en a_{n+1} kan vanuit a_n eenduidig bepaald worden voor $n \geq 1$. Vind de bijbehorende recurrente betrekking. Wat is de convergentiestraal van deze machtreeks?

(b) [10 pt] Bewijs dat als

$$\alpha = \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

dan is de functie $y(x)$ een polynoom $p_k(x)$ van graad k.

(c) [5 pt] Bereken p_k met $p_k'(0) = 1$ voor $k = 1, 2$ en 3.