Tentamen
Lichamen & Galoistheorie

9 november 2021, 11.30u - 14.30u

- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert.
- Het is niet toegestaan het boek of je aantekening te gebruiken tijdens het tentamen.
- Schrijf leesbaar en licht je antwoorden toe (behalve bij Opgave 1).
- In totaal zijn er 90 punten te behalen. Bij elke opgave staat vermeld hoeveel punten deze waard is.

Opgave 1. (18 punten)
Geef voor elk van de volgende beweringen aan of deze **waar** of **onwaar** is. Je hoeft bij deze opgave geen toelichtingen te geven!

(a) Als K/F een Galoisuitbreiding is en E/F is een deeluitbreiding, dan is E ook Galois over F.
(b) Het polynoom $x^3 - 5x + 6$ is irreducibel over $\mathbb{Q}$.
(c) Het splijtlichaam van $x^6 - 1$ heeft graad 2 over $\mathbb{Q}$.
(d) Als F een eindig lichaam is en K/F een eindige uitbreiding, dan is K/F Galois.
(e) Het polynoom $x^6 + 60x^3 + 10$ is irreducibel over $\mathbb{Q}$.
(f) Zij $f(x) \in F[x]$ een polynoom, K/F het splijtlichaam van $f(x)$ en $\alpha, \beta \in K$ twee wortels van $f(x)$. Dan bestaat er een element $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)$ zodat $\sigma(\alpha) = \beta$.

Opgave 2. (12 punten)

(a) Bepaal een polynoom $f(x) \in \mathbb{F}_3[x]$ zodat $\mathbb{F}_3[x]/(f(x)) \cong \mathbb{F}_9$.
(b) Bepaal een polynoom $f(x) \in \mathbb{F}_2[x]$ zodat $\mathbb{F}_2[x]/(f(x)) \cong \mathbb{F}_{16}$.

Opgave 3. (20 punten)

(a) Schrijf $f(x) = x^8 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ als een product van irreducibele polynomen.
(b) Bewijs dat de Galoisgroep van $f(x) = x^8 - 1$ isomorf is aan de Klein 4-groep V_4.
(c) Schrijf $K/\mathbb{Q}$ voor een splijtlichaam van $f(x)$. Bepaal alle deeluitbreidingen $\mathbb{Q} \subseteq E \subseteq K$.

Opgave 4. (20 punten)

(a) Bepaal de Galoisafsluiting K van $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$.
(b) Beschrijf de Galoisgroep $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ en bepaal alle deeluitbreidingen $\mathbb{Q} \subseteq E \subseteq K$.
(c) Bewijs dat $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ niet bevat is in een cyclotomische uitbreiding van $\mathbb{Q}$. Met andere woorden, bewijs dat er geen natuurlijk getal n bestaat zodat $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_n)$.

Opgave 5. (20 punten)

(a) Bepaal het cyclotomische polynoom $\Phi_{24}(x)$. (Hint: Je werk uit Opgave 3 kan hier van pas komen.)
(b) Bewijs dat $\mathbb{Q}(\zeta_{24})$ het compositum is van $\mathbb{Q}(\zeta_8)$ en $\mathbb{Q}(\zeta_3)$.
(c) Bewijs dat $\mathbb{Q}(\zeta_{24}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, i)$.