Hertentamen
Lichamen & Galoistheorie

21 december 2021, 17u - 20u

- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert.
- Het is niet toegestaan het boek of je aantekening te gebruiken tijdens het tentamen.
- Schrijf leesbaar en licht je antwoorden toe (behalve bij Opgave 1).
- In totaal zijn er 90 punten te behalen. Bij elke opgave staat vermeld hoeveel punten deze waard is.

Opgave 1. (18 punten)
Geef voor elk van de volgende beweringen aan of deze **waar** of **onwaar** is. Je hoeft bij deze opgave geen toelichtingen te geven!

(a) De reële getallen $\mathbb{R}$ vormen een algebraïsch gesloten lichaam.
(b) De groep S_3 is oplosbaar.
(c) Het polynoom $x^3 + 5x + 6$ is irreducibel over $\mathbb{Q}$.
(d) Zij F een lichaam, α algebraïsch over F, en $[F(\alpha) : F]$ oneven. Dan geldt $F(\alpha) = F(\alpha^2)$.
(e) Het splijtlichaam van $x^5 - 1$ heeft graad 5 over $\mathbb{Q}$.
(f) Zij $f(x)$ een irreducibel polynoom over een eindig lichaam $\mathbb{F}_{p^n}$. Dan is $f(x)$ separabel.

Opgave 2. (18 punten)

(a) Bewijs de volgende gelijkheid in de polynoomring $\mathbb{F}_{p^n}[x]$:
$$x^{p^n} - x = \prod_{a \in \mathbb{F}_{p^n}} (x - a).$$
(b) Leidt af dat het product van alle $a \in \mathbb{F}_{p^n} - \{0\}$ gelijk is aan -1.
(c) Bewijs de stelling van Wilson, die zegt dat
$$(p-1)! \equiv -1 \pmod p.$$

Opgave 3. (22 punten)
We bekijken de uitbreiding $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{6})$ van $\mathbb{Q}$ en het element $\alpha = \sqrt{5} + \sqrt{6}$.

(a) Wat is de Galoisgroep $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$?
(b) Nummer de elementen van G als $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. Bepaal de som $\sigma_1(\alpha) + \sigma_2(\alpha) + \cdots + \sigma_n(\alpha)$ en het product $\sigma_1(\alpha)\sigma_2(\alpha)\cdots\sigma_n(\alpha)$.
(c) Vind het minimale polynoom van α.
(d) Bepaal alle deeluitbreidingen $\mathbb{Q} \subseteq E \subseteq K$.

Opgave 4. (32 punten)
We bekijken het polynoom $f(x) = x^6 - 2x^3 + 2$ over $\mathbb{Q}$ en schrijven K voor het splijtlichaam van $f(x)$.

(a) Schrijf $g(x) = x^2 - 2x + 2$. Laat zien dat K het splijtlichaam L van $g(x)$ bevat.
(b) Bepaal $[L : \mathbb{Q}]$.
(c) Bewijs dat $K = \mathbb{Q}(i, \sqrt{3}, \sqrt[3]{2})$.
(d) Bewijs dat K ook het splijtlichaam is van het polynoom $h(x) = (x^2 + 1)(x^3 - 2)$.
(e) Wat is de Galoisgroep van $f(x)$?