TENTAMEN VOOR GROEPEN, MODULEN EN VOORSTELLINGEN
12 APRIL 2022, 17.00 - 20.00

TENTAMENVRAGEN (NEDERLANDS)

Vraag 1. (24 punten) Zij R een commutatieve ring, en zij $M = R^{\oplus n}$ de vrije moduul van rang n. Beschouw de afbeelding

$$f : M \to R$$
$$m = (r_1, r_2, \ldots, r_n) \mapsto r_1 + r_2 + \ldots + r_n.$$

Vraag 1a (8 punten): Bewijs dat f een R-moduulhomomorfisme is.

Hiervoor check je dat

$$\begin{aligned} f(m_1 + m_2) &= f((r_1, r_2, \ldots, r_n) + (s_1, s_2, \ldots, s_n)) = f(r_1 + s_1, \ldots, r_n + s_n) \\ &= (r_1 + s_1) + (r_2 + s_2) + \ldots + (r_n + s_n)) = (r_1 + \ldots + r_n) + (s_1 + \ldots + s_n) \\ &= f(m_1) + f(m_2) \end{aligned}$$

en dat

$$f(rm) = f(r(r_1, r_2, \ldots, r_n)) = f((rr_1, \ldots rr_n)) = rr_1 + rr_2 + \ldots rr_n = r(r_1 + \ldots + r_n) = rf(m).$$

Vraag 1b (8 punten): Bewijs met het submoduulcriterium dat

$$\ker(f) = \{(r_1, r_2, \ldots, r_n) : r_1 + r_2 + \ldots + r_n = 0\}$$

een submoduul is van M.

We zien dat $\ker(f) \neq \emptyset$ omdat het bijvoorbeeld $(r, -r, 0, \ldots, 0)$ bevat. Stel dat $m_1 = (r_1, \ldots, r_n)$ en $m_2 = (s_1, \ldots, s_n)$ in $\ker(f)$ zitten, zodat $r_1 + \ldots + r_n = 0$ en $s_1 + \ldots + s_n = 0$. Dan geldt voor $m_1 + rm_2 = (r_1 + rs_1, r_2 + rs_2, \ldots, r_n + rs_n)$ dat

$$(r_1 + rs_1) + (r_2 + rs_2) + \ldots + (r_n + rs_n) = (r_1 + r_2 + \ldots + r_n) + r(s_1 + s_2 + \ldots + s_n) = 0 + r \cdot 0 = 0,$$

zodat ook $m_1 + rm_2 \in \ker(f)$.

Vraag 1c (8 punten): Gebruik de eerste isomorfismestelling om het beeld van f te beschrijven. Wat is de rang?

De eerste isomorfismestelling zegt dat $M/\ker(f) \simeq \mathrm{im}(f)$, dus het beeld is gelijk aan het quotient $M/\{(r_1, \ldots, r_n) : \sum_i r_i = 0\}$. We zien dat $\ker(f)$ rang $n - 1$ heeft en leiden daaruit af dat het beeld rang 1 heeft. Je kunt ook bijvoorbeeld zien dat een element uit M te schrijven is als

$$(r_1, \ldots, r_n) = (r_1, \ldots, r_{n-1}, -(r_1 + \ldots + r_{n-1})) + (0, 0, \ldots, 0, r_1 + \ldots + r_n)$$

waarbij de eerste term in $\ker(f)$ zit en de tweede term een element uit R weergeeft.

Vraag 2. **(16 punten)** Zij $G = \{1, \sigma\}$ een groep van orde 2 en zij $R = \mathbb{Z}[G]$ de groepenring van G over $\mathbb{Z}$. Zij $M = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$ een vrij $\mathbb{Z}$-moduul van rang 2, met basis $\{e_1, e_2\}$. Stel dat we weten dat $\sigma(e_1) = e_1 + 2e_2$ en $\sigma(e_2) = -e_2$.

Vraag 2a (8 punten): Bewijs dat M een R-moduul is.

Merk op dat M een abelse groep is onder de gebruikelijke optelling

$$(n_1e_1, n_2e_2) + (m_1e_1, m_2e_2) = ((n_1 + m_1)e_1, (n_2 + m_2)e_2).$$

Bekijk dan de R-moduulstructuur zoals gegeven in de opgave. Ieder element uit R is te schrijven als $r = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot \sigma$ en een element uit M als $m = (n_1e_1 + n_2e_2)$. We checken:

(a) Er geldt dat

$$\begin{aligned}
(r_1 + r_2).m &= ((a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot \sigma) + (b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot \sigma)).(n_1e_1, n_2e_2) \\
&= ((a_1 + b_1) \cdot 1 + (a_2 + b_2) \cdot \sigma)(n_1e_1, n_2e_2) \\
&= ((a_1 + b_1)n_1e_1, (a_1 + b_1)n_2e_2) + ((a_2 + b_2)n_1e_1, (a_2 + b_2)(2n_1 - n_2)e_2) \\
&= (a_1 + a_2 + b_1 + b_2)n_1e_1, (2(a_2 + b_2)n_1 + (a_1 + b_1 - a_2 - b_2)n_2)e_2)
\end{aligned}$$

wat gelijk is aan

$$\begin{aligned}
r_1.m + r_2.m &= (a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot \sigma).(n_1e_1, n_2e_2) + (b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot \sigma).(n_1e_1, n_2e_2) \\
&= ((a_1 + a_2)n_1e_1, (2a_2n_1 + (a_1 - a_2)n_2)e_2) + ((b_1 + b_2)n_1e_1, (2b_2n_1 + (b_1 - b_2)n_2)e_2) \\
&= (a_1 + b_1 + a_2 + b_2)n_1e_1, (2(a_2 + b_2)n_1 + (a_1 + b_1 - a_2 - b_2)n_2)e_2).
\end{aligned}$$

(b) Er geldt dat

$$\begin{aligned}
(r_1 \cdot r_2)m &= ((a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot \sigma) \cdot (b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot \sigma))(n_1e_1, n_2e_2) \\
&= ((a_1b_1 + a_2b_2) \cdot 1 + (a_1b_2 + a_2b_1) \cdot \sigma).(n_1e_1, n_2e_2) \\
&= ((a_1b_1 + a_2b_2)n_1e_1, (a_1b_1 + a_2b_2)n_2e_2) \\
&\quad + ((a_1b_2 + a_2b_1)n_1e_1, (2(a_1b_2 + a_2b_1)n_1 - (a_1b_2 + a_2b_1)n_2)e_2) \\
&= ((a_1 + a_2)(b_1 + b_2)n_1e_1, ((a_1 - a_2)(b_1 - b_2)n_2 + 2(a_1b_2 + a_2b_1)n_1)e_2)
\end{aligned}$$

wat gelijk is aan

$$\begin{aligned}
r_1.(r_2.m) &= (a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot \sigma).((b_1 + b_2)n_1e_1, (2b_2n_1 + (b_1 - b_2)n_2)e_2) \\
&= ((a_1 + a_2)(b_1 + b_2)n_1e_1, (2a_2(b_1 + b_2)n_1 - a_2(b_1 - b_2)n_2)e_2) \\
&= (a_1(b_1 + b_2)n_1e_1, a_1(2b_2n_1 + (b_1 - b_2)n_2)e_2) \\
&\quad + (a_2(b_1 + b_2)n_1e_1, (2a_2(b_1 + b_2)n_1 = a_2(2b_2n_1 + (b_1 - b_2)n_2))e_2) \\
&= ((a_1 + a_2)(b_1 + b_2)n_1e_1, ((a_1 - a_2)(b_1 - b_2)n_2 + 2(a_1b_2 + a_2b_1)n_1)e_2).
\end{aligned}$$

(c) Er geldt dat

$$\begin{aligned}
r.(m_1 + m_2) &= (a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot \sigma)).((n_1e_1, n_2e_2) + (m_1e_1, m_2e_2)) \\
&= (a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot \sigma)).((n_1 + m_1)e_1, (n_2 + m_2)e_2) \\
&= (a_1(n_1 + m_1)e_1, a_1(n_2 + m_2)e_2) + (a_2(n_1 + m_1)e_1, (2a_2(n_1 + m_1) - a_2(n_2 + m_2))e_2) \\
&= ((a_1 + a_2)(n_1 + m_1)e_1, ((a_1 - a_2)(n_2 + m_2) + 2a_2(n_1 + m_1))e_2)
\end{aligned}$$

wat gelijk is aan

$$\begin{aligned}
r.m_1 + r.m_2 &= (a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot \sigma)).(n_1e_1, n_2e_2) + (a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot \sigma)).(m_1e_1, m_2e_2) \\
&= ((a_1 + a_2)n_1e_1, ((a_1 - a_2)n_2 + 2a_2n_1)e_2) \\
&+ ((a_1 + a_2)m_1e_1, ((a_1 - a_2)m_2 + 2a_2m_1)e_2) \\
&= ((a_1 + a_2)(n_1 + m_1)e_1, ((a_1 - a_2)(n_1 + m_2) + 2a_2(n_1 + m_1))e_2).
\end{aligned}$$

(d) Er geldt dat

$$1.(n_1e_1 + n_2e_2) = (n_1e_1 + n_2e_2).$$

Bekijk de uitwendige algebra $\Lambda(M) = \bigoplus_i \Lambda^i(M)$, waarbij

$$\Lambda^2(M) = (M \otimes M)/\{m \otimes m : m \in M\}.$$

Vraag 2b (8 punten): Laat zien dat het R-moduul $\Lambda^2(M)$ een groep van orde 2 is met voortbrenger $e_1 \wedge e_2$.

Er is gegeven dat M een vrij moduul is van rang 2 met basis $\{e_1, e_2\}$. Daardoor weten we dat $\Lambda^2(M)$ voortgebracht wordt door $e_1 \wedge e_2$ als $\mathbb{Z}$-moduul van rang 1, want alle andere $e_i \wedge e_j$ zijn nul. Ieder $\mathbb{Z}$-moduul is een abelse groep (en andersom).
De groep heeft orde 2 omdat

$$2(e_1 \wedge e_2) = e_1 \wedge (2e_2) = e_1 \wedge (\sigma(e_1) - e_1) = \sigma(e_1 \wedge e_1) - e_1 \wedge e_1 = 0 - 0 = 0$$

omdat $a \wedge a = 0$ voor alle a in een uitwendige algebra.

Vraag 3. (10 punten) Bepaal de Jordannormaalvorm van de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Noem de matrix A. Eerst berekenen we het karakteristieke polynoom van de matrix, als $\det(A - \lambda I)$ en vinden dat die gelijk is aan

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1 = (\lambda - 1)^4.$$

De enige eigenwaarde is dus $\lambda = 1$. We checken bovendien dat het karakteristieke polynoom gelijk is aan het minimaalpolynoom, waardoor er een unieke elementaire divisor is. We hebben dus een uniek Jordanblok

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

met $\lambda = 1$, dus we vinden als Jordannormaalvorm

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vraag 4. (25 punten) Bekijk de quaternionengroep Q_8 van orde 8:

$$Q_8 = \langle r, s : r^4 = s^4 = 1, r^2 = s^2, r^{-1}sr = s^{-1} \rangle.$$

Je mag in deze opgave gebruiken dat de conjugatieklassen er als volgt uitzien:

$$\{1\}, \{r^2\}, \{r, r^3\}, \{s, s^3\}, \{rs, sr\}.$$

Vraag 4a (5 punten): Laat zien dat de afbeelding

$$\begin{aligned} \varphi : Q_8 &\to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \\ r &\mapsto \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right) \\ s &\mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \end{aligned}$$

een tweedimensionale voorstelling van Q_8 geeft.

Hiervoor moet je checken dat $\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right)^4 = \mathrm{Id}_2$, dat $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^2 = \mathrm{Id}_2$, dat $\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right)^2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^2$ en dat $\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right)^{-1} \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^{-1}$.

Vraag 4b (5 punten): Is de voorstelling φ trouw?

Door te checken dat $\varphi(x)$ niet de identitieit is voor $x = r, r^2, r^3, s, s^3, rs$ en sr, vinden we dat φ inderdaad trouw is.

Vraag 4c (5 punten): Zij χ het karakter van φ. Bereken de waarden van χ op alle conjugatieklassen.

Uitrekenen geeft:

$$\chi(1) = 2, \qquad \chi(r^2) = -2, \qquad \chi(r) = 0, \qquad \chi(s) = 0, \qquad \chi(rs) = 0.$$

Vraag 4d (5 punten): Is de voorstelling φ irreducibel? (Hint: gebruik het inproduct.)

We gebruiken de vorige opgave en zien dat

$$\begin{aligned} \langle \chi, \chi \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{5} |\mathscr{C}_i| \chi(g_j^{-1}) \chi(g_j) \\ &= \frac{1}{8}(1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) \cdot (-2) + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 0) = 1, \end{aligned}$$

dus de voorstelling is inderdaad irreducibel.

Vraag 4e (5 punten): Hoeveel niet-equivalente irreducibele voorstellingen heeft Q_8 over $\mathbb{C}$ en welke graden hebben ze?

We weten dat het aantal irreducibele voorstellingen gelijk is aan het aantal conjugatieklassen, dus dat is 5. Als we de graden n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 noemen, weten we bovendien dat $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 + n_5^2 = 8$. De triviale voorstelling geeft $n_1 = 1$ en de voorstelling hierboven geeft $n_2 = 2$. Dan zien we dat we moeten hebben dat $n_3 = n_4 = n_5 = 1$.

Vraag 5. (25 punten) Geef voor elk van de volgende vijf vragen een voorbeeld met toelichting, of bewijs dat een voorbeeld niet kan bestaan.

Vraag 5a (5 punten): Een groep van orde 2022 waarvan alle irreducibele voorstellingen ééndimensionaal zijn.

Bijvoorbeeld $\mathbb{Z}/2022\mathbb{Z}$. Dit is een cyclische en dus abelse groep, waarvan we weten dat alle irreducibele voorstellingen dimensie 1 hebben en worden gegeven voor 2022e eenheidswortels.

Vraag 5b (5 punten): Een groep van orde 12 waarvan alle irreducibele voorstellingen tweedimensionaal zijn.

Iedere groep heeft de triviale voorstelling als irreducibele voorstelling van dimensie 1, dus zo'n groep kan niet bestaan.

Vraag 5c (5 punten): Een groep waarvan de reguliere voorstelling φ_{reg} irreducibel is.

We weten dat de reguliere voorstelling uiteenvalt als een directe som $\varphi_{\text{reg}} = n_1\varphi_1 \oplus \ldots \oplus n_k\varphi_k$ waarbij de φ de irreducibele voorstellingen van de groep zijn en $n_i = \varphi(1)$ de bijbehorende graden zijn. Hieruit volgt dus dat de reguliere voorstelling reducibel is zodra $|G| > 1$; of met andere woorden, de enige groep waarvan de reguliere voorstelling irreducibel is, is de triviale groep.

Vraag 5d (5 punten): Een groep G van orde 12 met een ondergroep H van index 4 en een niet-triviale voorstelling van H zodat de geïnduceerde voorstelling van G graad 4 heeft.

We weten dat voor een voorstelling V van H geldt dat $\dim \operatorname{Ind}_H^G(V) = [G : H] \dim(V)$. Voor H van index 4 met geïnduceerde voorstelling van graad 4 moet dus gelden dat $4 = 4\dim(V)$, oftewel dat $\dim(V) = 1$. Kies nu bijvoorbeeld $H = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ als ondergroep van $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ en de ééndimensionale voorstelling $x \mapsto e^{2\pi i/3}$ van H. (Spannender voorbeelden bestaan ook.)

Vraag 5e (5 punten): Twee karakters χ, χ' van een groep van orde 4 zodat $\langle \chi, \chi' \rangle \neq 0, 1$.

Voor *irreducibele* karakters χ, χ' van een groep G weten we dat $\langle \chi, \chi' \rangle = 0, 1$. Dus we zullen met niet-irreducibele karakters moeten werken. Kies bijvoorbeeld de groep $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \langle x : x^4 = 1 \rangle$ met irreducibele karakters $\chi_1 : x \mapsto 1$, $\chi_2 : x \mapsto i$, $\chi_3 : x \mapsto -1$, en $\chi_4 : x \mapsto -i$. Als we nu bijvoorbeeld $\chi = 3\chi_2$ en $\chi' = 2\chi_2 \oplus \chi_3$ kiezen, vinden we dat $\langle \chi, \chi' \rangle = 2$.

EINDE VAN HET TENTAMEN