TENTAMEN VOOR GROEPEN, MODULEN EN VOORSTELLINGEN
12 APRIL 2022, 17.00 - 20.00

TENTAMENVRAGEN

Vraag 1. (24 punten) Zij R een commutatieve ring, en zij $M = R^{\oplus n}$ de vrije moduul van rang n. Beschouw de afbeelding

$$f : M \to R$$
$$m = (r_1, r_2, \ldots, r_n) \mapsto r_1 + r_2 + \ldots + r_n.$$

Vraag 1a (8 punten): Bewijs dat f een R-moduulhomomorfisme is.

Vraag 1b (8 punten): Bewijs met het submoduulcriterium dat

$$\ker(f) = \{(r_1, r_2, \ldots, r_n) : r_1 + r_2 + \ldots + r_n = 0\}$$

een submoduul is van M.

Vraag 1c (8 punten): Gebruik de eerste isomorfismestelling om het beeld van f te beschrijven. Wat is de rang?

Vraag 2. (16 punten) Zij $G = \{1, \sigma\}$ een groep van orde 2 en zij $R = \mathbb{Z}[G]$ de groepenring van G over $\mathbb{Z}$. Zij $M = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$ een vrij $\mathbb{Z}$-moduul van rang 2, met basis $\{e_1, e_2\}$. Stel dat we weten dat $\sigma(e_1) = e_1 + 2e_2$ en $\sigma(e_2) = -e_2$.
Vraag 2a (8 punten): Bewijs dat M een R-moduul is.

Bekijk de uitwendige algebra $\Lambda(M) = \bigoplus_i \Lambda^i((M)$, waarbij

$$\Lambda^2(M) = (M \otimes M)/\{m \otimes m : m \in M\}.$$

Vraag 2b (5 punten): Laat zien dat het R-moduul $\Lambda^2(M)$ een groep van orde 2 is met voortbrenger $e_1 \wedge e_2$.

Vraag 3. (10 punten) Bepaal de Jordannormaalvorm van de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vraag 4. (25 punten) Bekijk de quaternionengroep Q_8 van orde 8:

$$Q_8 = \langle r, s : r^4 = s^4 = 1, r^2 = s^2, r^{-1}sr = s^{-1} \rangle.$$

Je mag in deze opgave gebruiken dat de conjugatieklassen er als volgt uitzien:

$$\{1\}, \{r^2\}, \{r, r^3\}, \{s, s^3\}, \{rs, sr\}.$$

Vraag 4a (5 punten): Laat zien dat de afbeelding

$$\begin{aligned} \varphi : Q_8 &\to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \\ r &\mapsto \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right) \\ s &\mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \end{aligned}$$

een tweedimensionale voorstelling van Q_8 geeft.

Vraag 4b (5 punten): Is de voorstelling φ trouw?

Vraag 4c (5 punten): Zij χ het karakter van φ. Bereken de waarden van χ op alle conjugatieklassen.

Vraag 1d (5 punten): Is de voorstelling φ irreducibel? (Hint: gebruik het inproduct.)

Vraag 1e (5 punten): Hoeveel niet-equivalente irreducibele voorstellingen heeft Q_8 over $\mathbb{C}$ en welke graden hebben ze?

Vraag 5. (25 punten) Geef voor elk van de volgende vijf vragen een voorbeeld met toelichting, of bewijs dat een voorbeeld niet kan bestaan.

Vraag 5a (5 punten): Een groep van orde 2022 waarvan alle irreducibele voorstellingen ééndimensionaal zijn.

Vraag 5b (5 punten): Een groep van orde 12 waarvan alle irreducibele voorstellingen tweedimensionaal zijn.

Vraag 5c (5 punten): Een groep waarvan de reguliere voorstelling φ_{reg} irreducibel is.

Vraag 5d (5 punten): Een groep G van orde 12 met een ondergroep H van index 4 en een niet-triviale voorstelling van H zodat de geïnduceerde voorstelling van G graad 4 heeft.

Vraag 5e (5 punten): Twee karakters χ, χ' van een groep van orde 4 zodat $\langle \chi, \chi' \rangle \neq 0, 1$.

EINDE VAN HET TENTAMEN