Inl. Analyse in Meer Variabelen Tentamen 8/11 - 2021, 15:15 -18:15

Uitwerking 1

(a) Het is evident dat Φ partieel differentieerbaar is met continue partiële afgeleiden. Derhalve is Φ C^1 en dus differentieerbaar. Met de kettingregel volgt dat $f \circ \Phi$ differentieerbaar is op $\mathbb{R}^2$, met afgeleide gegeven door $D(f \circ \Phi)(r, \varphi) = Df(\Phi(r, \varphi)) \circ D\Phi(r, \varphi)$. Door beide leden te laten werken op de 2-de standaardbasisvector vinden we

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} [f(\Phi(r, \varphi))] &= D_1 f(\Phi(r, \varphi)) \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}(r, \varphi) + D_2 f(\Phi(r, \varphi)) \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi}(r, \varphi) \\ &= -\Phi(r, \varphi)_2 D_1 f(\Phi(r, \varphi)) + \Phi(r, \varphi)_1 D_2 f(\Phi(r, \varphi)) = 0. \end{aligned}$$

(b) Uit (a) volgt dat voor alle $r \in \mathbb{R}$ de functie $\varphi \mapsto f(\Phi(r, \varphi))$ constant is, dus gelijk aan $f(\Phi(r, 0)) = f(r, 0)$. Uit het C^1 zijn van de functie f volgt het C^1 zijn van $r \mapsto f(r, 0)$. Definieer $g : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ door $g(r) = f(r, 0)$.

Zij $x \in \mathbb{R}^2$. Dan is $x = \Phi(r, \varphi)$ voor $r = \|x\|$ en een geschikte $\varphi \in \mathbb{R}$. Er volgt dat

$$f(x) = f(\Phi(\|x\|, \varphi)) = f(\|x\|, 0) = g(\|x\|),$$

dus g voldoet aan (b). Als h voldoet aan $f(x) = h(\|x\|)$ dan volgt in het bijzonder dat $f(r, 0) = h(r)$ voor $r \geq 0$, dus $h = g$. Hiermee is de uniciteit van g aangetoond.

(c) Zij $r \in [0, \infty[$, dan is $\|(r, 0)\| = r$. Met de in (b) gegeven formule volgt nu dat $g(r) = g(\|(r, 0)\|) = f(r, 0)$ voor alle $r \geq 0$. Uit de partiële differentieerbaarheid van f naar de eerste variabele volgt dat g differentieerbaar is, met afgeleide $g'(r) = D_1 f(r, 0)$. Uit het continu zijn van $D_1 f$ volgt het continu zijn van g'. Voorts is $g'(0) = D_1 f(0, 0)$.

Uitwerking 2

(a) Uit de gegeven schatting volgt dat $|b_k| = b_k \leq C^{-1} a_k$ voor alle $k \geq 1$. Door toepassing van het majorantiekenmerk zien we dat uit de convergentie van $\sum_{k=1} a_k$ die van $\sum_{k \geq 1} b_k$ zou volgen. Door contrapositie volgt nu de gevraagde implicatie.

(b) (1) Voor $k \geq 1$ geldt dat $\sqrt{k+1}/k^2 \leq \sqrt{k+k}/k^2 = \sqrt{2} k^{-3/2}$. De reeks $\sum_{k \geq 1} 1/k^s$ is convergent (lemma in dictaat) voor $s > 1$ dus voor $s = 3/2$. Met het majorantiekenmerk volgt dat de in (1) gegeven reeks convergent is.

(2) Er geldt voor elke $k \geq 1$ dat

$$\frac{1}{\sqrt{2k^2 - 1}} = \frac{1}{k\sqrt{2 - 1/k^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{k}.$$

De harmonische reeks $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ divergeert. Door toepassing van (a) volgt nu de divergentie van de reeks in (2).

(3) We passen het quotiënt-kenmerk toe. Zij a_k de term van de reeks. Dan is

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(k+1)!^2}{k!^2}\frac{(2k)!}{(2k+2)!} = \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{(1+1/k)^2}{(2+1/k)(2+2/k)}.$$

De laatste uitdrukking heeft limiet $1/4$ voor $k \to \infty$. Aangezien $1/4 < 1$ volgt door toepassing van het quotiënt-kenmerk dat de gegeven reeks convergeert.

Uitwerking 3

(a) Als $x \in S$ dan geldt voor alle k dat $x_k^4 \leq \sum_{j=1}^n x_j^4 \leq 1$, dus ook $x_k^2 \leq 1$. We leiden hieruit af dat voor $x \in S$ geldt: $\|x\|^2 \leq n$. Hieruit blijkt dat S begrensd is. De functie $g : x \to \sum_{j=1}^n x_j^4 - 1$ is C^1 dus in het bijzonder continu. Aangezien $\{0\}$ een gesloten verzameling in $\mathbb{R}$ terwijl $S = g^{-1}(\{0\})$, zien we dat S gesloten is. Dus S is gesloten en begrensd in $\mathbb{R}^n$. Aangezien f continu is, neemt f een maximale waarde m aan op S in een punt $\xi \in S$.

Er is een j zo dat $y_j \neq 0$. Nu is $e_j \in S$ en $f(e_j) = \langle e_j\,,\, y\rangle = y_j \neq 0$. Door te kiezen tussen e_j en $-e_j$ vinden we een punt $\varepsilon \in S$ zo dat $f(\varepsilon) > 0$. Dus $m \geq f(\varepsilon) > 0$.

(b) De functies f en g zijn C^1. Er geldt dat

$$\operatorname{grad} g(x) = (4x_1^3, \ldots, 4x_n^3)$$

en omdat $0 \notin S$ volgt dat $\operatorname{grad} g(x) \neq 0$ voor alle $x \in S$. De gradient van f wordt gegeven door

$$\operatorname{grad} f(x) = (y_1, \ldots, y_n) = y.$$

Met de multiplicatorenmethode van Lagrange volgt derhalve het bestaan van een $\lambda \in \mathbb{R}$ zo dat

$$y = \lambda \operatorname{grad} g(\xi) = \lambda(4\xi_1^3, \ldots, 4\xi_n^3).$$

Nemen we het inproduct met ξ dan vinden we

$$m = \langle \xi\,,\, y\rangle = 4\lambda \sum_{j=1}^{4} \xi_j^4 = 4\lambda.$$

We concluderen dat $\lambda = m/4$, dus

$$y = m(\xi_1^3, \ldots, \xi_n^3).$$

(c) Uit (b) volgt dat $\xi_j = (y_j/m)^{1/3}$. Hieruit volgt dat

$$\xi_j^4 = m^{-4/3}|y_j|^{4/3}.$$

Door te sommeren over j en te vermenigvuldigen met $m^{4/3}$ concluderen we dat

$$m^{4/3} = \sum_{j=1}^{n} |y_j|^{4/3}.$$

Hieruit volgt de gewenste formule voor m.

Uitwerking 4

(a) Er geldt dat
$$v(x) = \varphi(x_1^2 + x_2^2)\,(x_1, x_2).$$
Aangezien φ een C^1-functie is volgt met de gebruikelijke rekenregels voor partieel differentiëren dat v een C^1 vectorveld is op $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Verder is, voor $x \neq 0$,
$$D_1 v_2(x) = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi(x_1^2 + x_2^2) = 2x_2 x_1 \varphi'(\|x\|^2).$$
Op soortgelijke manier volgt
$$D_2 v_1(x) = 2x_1 x_2 \varphi'(\|x\|^2).$$
Hieruit volgt dat $D_1 v_2 = D_2 v_1$ op $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, dus het vectorveld is rotatie-vrij.

(b) Omdat ieder van de open verzamelingen $U_\pm$ enkelvoudig samenhangend is, en v rotatievrij op $U_\pm$, volgt dit direct uit Stelling 5.39.

(c) Zij f_+ als in (b) en $x \in U_+$, dan geldt voor iedere continue kromme γ in U_+ die $(\|x\|, 0)$ met x verbindt dat
$$f_+(x) - f_+(\|x\|, 0) = \int_\gamma v(\xi) \cdot d\xi.$$
Schrijf $x = \|x\|(\cos\alpha, \sin\alpha)$ met $-\pi/2 < \alpha < 3\pi/2$. Is $\alpha \geq 0$ dan kunnen we voor γ de C^1 kromme $[0, |\alpha|] \to U_+$, $t \mapsto \|x\|(\cos t, \sin t)$, nemen en is $\alpha < 0$ dan kunnen we voor γ de C^1 kromme $[0, |\alpha|] \to U_+$, $t \mapsto \|x\|(\cos t, -\sin t)$ nemen. In beide gevallen is $\gamma(t) \perp \gamma'(t)$ zodat
$$\int_\gamma v(\xi) \cdot d\xi = \int_0^{|\alpha|} \varphi(\|\gamma(t)\|^2)\gamma(t) \cdot \gamma'(t)\, dt = 0$$
Er volgt dat $f_+(x) - f_+(\|x\|, 0) = 0$.

(d) We merken op dat $f_+(1,0) = 0 = f_-(1,0)$. Zij V het open halfvlak van $\mathbb{R}^2$ bepaald door $x_1 > 0$. Dan is $V \subset U_+ \cap U_-$. Omdat V boogsamenhangend is, en $f_-|_V$ en $f_+|_V$ beide primitieven zijn van v op V, moet gelden dat $f_+ = f_-$ op V. In het bijzonder volgt hieruit dat $f_+(\|x\|, 0) = f_-(\|x\|, 0)$ voor alle $x \neq 0$ en hieruit volgt weer dat $f_+ = f_-$ op $U_+ \cap U_-$.

(e) We definiëren de functie $f : U_+ \cup U_- \to \mathbb{R}$ door $f = f_+$ op U_+ en $f = f_-$ op U_-. Wegens (d) is f goed gedefinieerd. Het is evident dat $U_- \cup U_+ = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Er geldt dat $\operatorname{grad} f = \operatorname{grad} f_+ = v$ op U_+ en evenzo $\operatorname{grad} f = \operatorname{grad} f_- = v$ op U_-. We concluderen dat f een primitieve van v op $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} = U_+ \cup U_-$ is, die voldoet aan $f(1,0) = f_+(1,0) = 0$. Omdat $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ boogsamenhangend is, is f uniek bepaald.