Inl. Analyse in Meer Variabelen — Tentamen 8/11 - 2021, 15:15 -18:15

- Het is een **open boek tentamen**: dictaat en aantekeningen mogen worden gebruikt.
- Schrijf op ieder vel **je naam** en bovendien op het eerste vel je **studentnummer** en het **aantal ingeleverde vellen**.
- Gebruik voor iedere opgave een apart vel.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- De normering per onderdeel en voor de opgave als geheel staan vermeld. Het totaal aantal te behalen punten is 44. Het tentamencijfer T wordt berekend uit de totale score S door $T = \min(S/4, 10)$, uitgerekend in 1 decimaal nauwkeurig.

Succes !

10 pt totaal **Opgave 1** Gegeven is een C^1-functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die voldoet aan

$$x_1 D_2 f(x) = x_2 D_1 f(x) \quad (x \in \mathbb{R}^2).$$

We beschouwen de afbeelding $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door $\Phi(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$.

4 pt (a) Toon aan dat de functie $f \circ \Phi$ differentieerbaar is en dat voor alle $(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2$ geldt dat

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[f(\Phi(r,\varphi))\right] = 0.$$

3 pt (b) Toon aan dat er een unieke functie $g : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ bestaat zo dat $f(x) = g(\|x\|)$ voor alle $x \in \mathbb{R}^2$.

3 pt (c) Toon aan dat de functie g differentieerbaar is op $[0,\infty[$ met continue afgeleide g'. Druk $g'(0)$ uit in de partiële afgeleiden van f in $(0,0)$.

10 pt totaal **Opgave 2**

3 pt (a) Veronderstel dat $\sum_{k\geq 1} a_k$ en $\sum_{k\geq 1} b_k$ reële reeksen zijn en veronderstel dat er een constante $C > 0$ bestaat zo dat

$$a_k \geq C\, b_k \geq 0, \qquad (k \geq 1).$$

Bewijs: als $\sum_{k\geq 1} b_k$ divergeert dan divergeert ook $\sum_{k\geq 1} a_k$.

7 pt (b) Bepaal voor de volgende reeksen of ze convergent of divergent zijn, en bewijs de juistheid van je antwoorden:

$$(1) \quad \sum_{k\geq 1} \frac{\sqrt{k+1}}{k^2}; \qquad (2) \quad \sum_{k\geq 1} \frac{1}{\sqrt{2k^2-1}}; \qquad (3) \quad \sum_{k\geq 1} \frac{(k!)^2}{(2k)!}.$$

ZOZ

12 pt totaal **Opgave 3** We beschouwen de volgende deelverzameling van $\mathbb{R}^n$, voor $n \geq 1$,

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^{n} x_j^4 = 1\}.$$

Laat $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gegeven zijn en definieer $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ door

$$f(x) = \langle x \, , \, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

3 pt (a) Bewijs dat f op S een maximale waarde m aanneemt in een punt $\xi \in S$ en dat $m > 0$.

6 pt (b) Bewijs dat $m(\xi_1^3, \ldots, \xi_n^3) = y$.

3 pt (c) Bewijs dat

$$m = \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^{4/3} \right)^{3/4}.$$

12 pt totaal **Opgave 4** In deze opgave gebruiken we de notatie

$$L_+ = \{(0,t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \geq 0\}, \quad \text{en} \quad L_- = \{(0,t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \leq 0\}.$$

Je mag zonder bewijs gebruiken dat $U_+ := \mathbb{R}^2 \setminus L_-$ en $U_- := \mathbb{R}^2 \setminus L_+$ enkelvoudig samenhangende open deelverzamelingen zijn van $\mathbb{R}^2$.

We beschouwen een C^1-functie $\varphi :]\,0, \infty[\to \mathbb{R}$ en definiëren het vectorveld $v : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ door $v(x) = \varphi(\|x\|^2)x$, $(x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$.

2 pt (a) Toon aan dat het vectorveld v rotatievrij is.

1 pt (b) Beargumenteer dat v op U_+ een unieke primitieve f_+ heeft met $f_+(1,0) = 0$, en op U_- een unieke primitieve f_- met $f_-(1,0) = 0$.

4 pt (c) Toon aan dat voor alle $x \in U_+$ geldt dat $f_+(x) = f_+(\|x\|, 0)$.

Je mag zonder bewijs het analoge resultaat gebruiken dat voor alle $x \in U_-$ geldt dat $f_-(x) = f_-(\|x\|, 0)$.

3 pt (d) Toon aan dat $f_+ = f_-$ op $U_+ \cap U_-$.

2 pt (e) Toon aan dat v op $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ een unieke primitieve f heeft met $f(1,0) = 0$.