Inl. Analyse in Meer Var. **Herkansing 20/12 - 2021, 17:00 - 20:00**

Uitwerking 1

Schrijf

$$f(a+h) = f(a) + Df(a)(h) + R(h),$$

voor $h \in U - a$. Dan geldt dat $\|R(h)\|/\|h\| \to 0$ voor $h \to 0$. Uit de lineariteit van L volgt verder dat $L(a+h) = L(a) + L(h)$.

Door dit te substitueren in de definitie van g vinden we

$$\begin{aligned} g(a+h) - g(a) &= \langle f(a) + Df(a)(h) + R(h)\,,\, L(a) + L(h)\rangle - \langle f(a)\,,\, L(a)\rangle \\ &= A(h) + r(h) \end{aligned}$$

met

$$A(h) = \langle Df(a)(h)\,,\, L(a)\rangle + \langle f(a)\,,\, L(h)\rangle$$

en

$$r(h) = \langle Df(a)(h)\,,\, L(h)\rangle + \langle R(h)\,,\, L(a) + L(h)\rangle.$$

Hierin is $h \mapsto A(h)$ een lineaire afbeelding $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Verder geldt, voor $h \in U - a$,

$$\begin{aligned} |r(h)| &\leq \|Df(a)(h)\|\|L(h)\| + \|R(h)\|\|L(a) + L(h)\| \\ &\leq \|Df(a)\|\|L\|\|h\|^2 + \||R(h)\|[\|L(a)\| + \|L\|\|h\|]. \end{aligned}$$

Daarom geldt, voor $h \in U - a$, $h \neq 0$,

$$\begin{aligned} \|h\|^{-1}|r(h)| &\leq \|Df(a)\|\|L\|\|h\| + \|h\|^{-1}\|R(h)\|[\|L(a)\| + \|L\|\|h\|] \\ &\to 0 + 0(\|L(a)\| + 0) = 0 \quad (h \to 0). \end{aligned}$$

dus vanwege de insluitstelling $\|h\|^{-1}|r(h)| \to 0$ voor $h \to 0$. Vanwege de definitie van differentieerbaarheid volgt nu dat g differentieerbaar is in a met als afgeleide de lineaire afbeelding A. Het gestelde volgt.

Uitwerking 2

(a) Er bestaat een N zo dat

$$k \geq N \Rightarrow |\frac{a_k}{b_k} - L| \leq L.$$

(Gebruik de definitie van limiet met $\varepsilon = L$.) Voor $k \geq N$ geldt derhalve $\frac{a_k}{b_k} \leq 2L$ dus $a_k \leq 2Lb_k$.

(b) Indien de reeks $\sum_{k\geq 1} b_k$ convergeert, dan volgt met het majorantiekenmerk en schatting (a) dat ook de reeks $\sum_{k\geq 1} a_k$ convergeert. De andere implicatie zien we als volgt in. Uit de quotiëntregel voor limieten volgt, aangezien $L \neq 0$, dat

$$\lim_{k\to\infty} \frac{b_k}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{a_k}{b_k}\right)^{-1} = L^{-1} > 0.$$

Passen we nu het voorgaande toe met b_k, a_k, L^{-1} in plaats van a_k, b_k, L, dan zien we dat uit de convergentie van $\sum_{k\geq 1} a_k$ ook die van $\sum_{k\geq 1} b_k$ volgt.

(c) We beginnen met de eerste reeks. Schrijf $a_k = \frac{\sqrt{k}+1}{k^2+1}$ en $b_k = k^{-3/2}$, dan geldt dat

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{1+k^{-1/2}}{1+k^{-2}} \to 1, \qquad (k\to\infty).$$

Er geldt dat $\sum_{k\geq 1} k^{-3/2}$ convergent is. Passen we nu (a) en (b) toe met $L=1$ dan zien we dat de reeks

$$\sum_{k\geq 1} \frac{\sqrt{k}+1}{k^2+1}$$

convergent is.

We bekijken nu de tweede reeks en schrijven $a_k = \frac{k+1}{k^2+1}$ en $b_k = k^{-1}$. Dan is het bekend dat de reeks $\sum_{k\geq 1} b_k$ divergent is. Er geldt dat

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{1+1/k}{1+1/k^2} \to 1$$

dus uit de convergentie van $\sum_{k\geq 1} a_k$ zou die van $\sum_{k\geq 1} b_k$ volgen, tegenspraak. We concluderen dat de reeks $\sum_{k\geq 1} a_k$ divergeert.

Uitwerking 3

(a) Zij $x \in S$. Dan geldt voor iedere j dat $x_j^6 \leq 1$, dus $|x_j| \leq 1$. Hieruit volgt dat $\|x\|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2 \leq n$.

(b) $S = g^{-1}(\{0\})$ voor g de continue functie $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $g(x) = \sum_{j=1}^n x_j^6 - 1$. Aangezien de verzameling $\{0\}$ gesloten is in $\mathbb{R}$ is S gesloten in $\mathbb{R}^n$. Verder volgt uit (a) dat S begrensd is.

De continue functie f neemt op de gesloten en begrensde verzameling S een maximum aan in een punt $\xi \in S$. Er is een j zo dat $y_j \neq 0$. Hieruit volgt dat $f(e_j) = y_j \neq 0$. Merk op dat e_j en $-e_j$ tot S behoren. Door e_j eventueel te vervangen door $-e_j$ zien we dat $e \in S$ bestaat zo dat $f(e) = |y_j|$. We concluderen dat $m \geq |y_j| > 0$.

(c) De functies f en g zijn C^1 met gradiënten $\operatorname{grad} f(x) = y$ en $\operatorname{grad} g(x) = 6(x_1^5, \ldots, x_n^5)$, voor alle $x \in \mathbb{R}^n$. Het is duidelijk dat $\operatorname{grad} g(x) \neq 0$ voor $x \neq 0$ dus voor $x \in S$. Met de multiplicatorenmethode van Lagrange volgt nu dat er een $\lambda \in \mathbb{R}$ bestaat zo dat

$$y = \operatorname{grad} f(\xi) = \lambda \operatorname{grad} g(\xi) = 6\lambda(\xi_1^5, \ldots, \xi_n^5).$$

Hieruit volgt het gestelde met $\mu = 6\lambda$.

(d) Er geldt dat

$$f(\xi) = \sum_{j=1}^{n} y_j \xi_j = \sum_{j=1}^{n} \mu \xi_j^5 \xi_j = \mu \sum_{j=1}^{n} \xi_j^6 = \mu.$$

(e) Uit (c) volgt dat $|y_j|^{1/5} = |\mu|^{1/5}|\xi_j|$, dus $|y_j|^{6/5} = |\mu|^{6/5}\xi_j^6$. Door sommeren over $j = 1, \ldots, n$ volgt dat

$$\sum_{j=1}^{n} |y_j|^{6/5} = |\mu|^{6/5}.$$

Uit (d) en $m > 0$ volgt $|\mu| = m$ dus

$$m^{6/5} = \sum_{j=1}^{n} |y_j|^{5/6}.$$

Door beide leden van de verkregen gelijkheid te verheffen tot de macht $5/6$ verkrijgen we de gewenste identiteit.

Uitwerking 4

(a) Het is duidelijk dat de partiële afgeleiden van v bestaan en continu zijn. Dus v is een C^1-vectorveld. De afgeleide $Dv(x, y, z)$ wordt voor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ gegeven wordt door de Jacobi matrix

$$\operatorname{mat} Dv(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2z & 2y & 2x \\ 2y & 2x & 2z \\ 2x & 2z & 2y \end{pmatrix}.$$

Deze is symmetrisch. Per definitie betekent dit dat v rotatievrij is.

(b) De kromme $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ kan gedefinieerd worden door

$$\gamma(s) = (0, 0, 2s).$$

De kromme $\sigma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ kan gedefinieerd worden door

$$\sigma(s) = (\sin \pi s, 0, 1 - \cos \pi s).$$

(c) We definiëren de afbeelding $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ door

$$\Gamma(s, t) = \sigma(s) + t(\gamma(s) - \sigma(s)).$$

Dan is het wegens de rekenregels voor continuïteit duidelijk dat Γ een continue afbeelding is. Verder geldt dat

$$\Gamma(s, 0) = \sigma(s), \quad \text{en} \quad \Gamma(s, 1) = \gamma(s), \qquad (s \in [0, 1]).$$

dus Γ is een homotopie van σ en γ. Tenslotte geldt voor alle $t \in [0, 1]$ dat

$$\Gamma(0, t) = p \quad \text{en} \quad \Gamma(1, t) = q,$$

dus Γ is een homotopie met behoud van eindpunten.

(d) Op grond van de homotopie-invariantie van de integraal van een rotatievrij vectorveld geldt

$$\int_\sigma v(\xi) \cdot d\xi = \int_\gamma v(\xi) \cdot d\xi. \qquad (*)$$

Er geldt dat $v(\gamma(s)) = (0, 4s^2, 1)$ en dat $\gamma'(s) = (0, 0, 2)$, dus $v(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) = 2$ voor alle $s \in [0, 1]$. Hieruit volgt dat

$$\int_\gamma v(\xi) \cdot d\xi = \int_0^1 2\, ds = 2.$$

Combineren we dit met (*) dan volgt het gestelde.