**Inl. Analyse in Meer Var.** **Herkansing 20/12 - 2021, 17:00 - 20:00**

- Het is een **open boek tentamen**: dictaat en aantekeningen mogen worden gebruikt.
- Schrijf op ieder vel **je naam** en bovendien op het eerste vel je **studentnummer** en het **aantal ingeleverde vellen**.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- De normering per onderdeel en voor de opgave als geheel staan vermeld. Het totaal aantal te behalen punten is 42. Het tentamencijfer $T$ wordt berekend uit de totale score $S$ door $T = \min(S/4, 10)$, uitgerekend in 1 decimaal nauwkeurig, en vervolgens afgerond naar een geheel getal onder de 6 en een halftallig getal daarboven.

*Succes !*

10 pt totaal **Opgave 1** Gegeven is een open deel $U \subset \mathbb{R}^n$, een punt $a \in U$ en een afbeelding $f : U \to \mathbb{R}^p$ die differentieerbaar is in $a$. Verder is $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ een lineaire afbeelding. Toon aan dat de functie $g : U \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$g(x) = \langle f(x)\,,\, L(x)\rangle, \qquad (x \in U),$$

totaal differentieerbaar is in $a$ en dat de afgeleide $Dg(a)$ gegeven wordt door de formule

$$Dg(a)(h) = \langle Df(a)(h)\,,\, L(a)\rangle + \langle f(a)\,,\, L(h)\rangle, \qquad (h \in \mathbb{R}^n).$$

10 pt totaal **Opgave 2** We beschouwen twee rijen $(a_k)_{k\geq 1}$ en $(b_k)_{k\geq 1}$ in $]0,\infty[$. Gegeven is dat er een $L > 0$ bestaat zo dat

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = L.$$

2 pt (a) Toon aan dat er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat

$$k \geq N \;\Rightarrow\; a_k \leq 2L\, b_k.$$

4 pt (b) Toon aan dat de reeks $\sum_{k\geq 1} a_k$ convergeert dan en slechts dan als de reeks $\sum_{k\geq 1} b_k$ convergeert.

4 pt (c) Bepaal of de volgende reeksen convergent dan wel divergent zijn. Bewijs de juistheid van je bewering door gebruik te maken van (b).

$$\sum_{k\geq 1} \frac{\sqrt{k}+1}{k^2+1}, \qquad \sum_{k\geq 1} \frac{k+1}{k^2+1}.$$

**ZOZ**

12 pt totaal **Opgave 3** We beschouwen de volgende deelverzameling van $\mathbb{R}^n$, voor $n \geq 1$,

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^{n} x_j^6 = 1\}.$$

Laat $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gegeven zijn en definieer $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ door

$$f(x) = \langle x \, , \, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

1 pt (a) Toon aan dat voor alle $x \in S$ geldt: $\|x\|^2 \leq n$.

3 pt (b) Bewijs dat $f$ op $S$ een maximale waarde $m$ aanneemt in een punt $\xi \in S$ en dat $m > 0$.

3 pt (c) Bewijs dat er een $\mu \in \mathbb{R}$ bestaat zo dat $y = \mu(\xi_1^5, \ldots, \xi_n^5)$.

2 pt (d) Toon aan dat

$$f(\xi) = \mu.$$

3 pt (e) Bewijs dat

$$m = \left( \sum_{j=1}^{n} |y_j|^{6/5} \right)^{5/6}.$$

10 pt totaal **Opgave 4** In deze opgave beschouwen we het vectorveld $v$ op $\mathbb{R}^3$ gegeven door

$$v(x, y, z) = (y^2 + 2xz, 2xy + z^2, 2yz + x^2 + 1).$$

2 pt (a) Toon aan dat $v$ een $C^1$ vectorveld is en bepaal voor elke $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ de matrix van de totale afgeleide $Dv(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Toon aan dat het vectorveld $v$ rotatievrij is.

3 pt (b) In dit onderdeel volstaat het correcte definities te geven. Er hoeft niets bewezen te worden.

Definieer een $C^1$-kromme $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ met beginpunt $p := (0, 0, 0)$ en eindpunt $q := (0, 0, 2)$ waarvan het beeld gelijk is aan het lijnstuk tussen dit begin- en eindpunt.

Definieer tevens een $C^1$-kromme $\sigma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ met beginpunt $p$ en eindpunt $q$ waarvan het beeld gelijk is aan de halve cirkelboog bestaande uit de punten $(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3$ met $\|(x, 0, z) - (0, 0, 1)\| = 1$ en $x \geq 0$.

3 pt (c) Bewijs dat $\gamma$ en $\sigma$ in $\mathbb{R}^3$ homotoop zijn met behoud van eindpunten.

2 pt (d) Toon aan dat $\int_\sigma v(\xi) \cdot d\xi = 2$.