F. Ziltener

2021/ 2022, blok 4
28 juni, 2022

Analyse in meer variabelen, WISB212

Tentamen

achternaam: ________________ voornaam: ________________

studentnummer: ________________________________

Het tentamen duurt 180 minuten.

Aanwijzingen:

- Zet je mobiele telefoon uit en leg hem in je tas.
- Leg je studentenkaart op tafel.
- Schrijf met een blauwe of zwarte pen, **niet** met een groene of rode pen, noch met een potlood.
- **Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.**
- **Lever ook dit voorblad in.**
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt oplossen, mag je dit onderdeel in het vervolg wel gebruiken.

26 punten zijn voldoende voor een cijfer 5.5.

Voor verdere aanwijzingen z.o.z.

1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
/5	/5	/17	/8	/9	/7	/7	/8	/66

Boeken, cursusmateriaal en rekenmachines mogen niet gebruikt worden, maar het is toegestaan om één vel papier (A4-formaat, voor- en achterkant) met eigen aantekeningen te gebruiken. Deze moeten handgeschreven zijn.

Tenzij anders aangegeven, mag je ieder resultaat ((hulp-)stelling, propositie of gevolg) gebruiken dat in het hoorcollege of in de cursusboeken is bewezen, zonder het opnieuw te bewijzen.

Als een tentamenopgave (deel van) een resultaat X in het hoorcollege of in het boek was dan wordt verwacht dat je de uitspraak herbewijst. Tenzij anders aangegeven, mag je elk resultaat gebruiken dat in het bewijs van X werd gebruikt, zonder het te bewijzen.

Tenzij anders aangegeven, mag je het volgende zonder bewijs gebruiken:

- Differentieerbaarheid van een afbeelding die door een expliciete formule gegeven is, als de afbeelding inderdaad differentieerbaar is. Hetzelfde geldt voor gladheid.
- differentieerbaarheid van een (bi-)lineaire afbeelding tussen eindigdimensionale vectorruimten
- een formule voor de afgeleide van een lineaire afbeelding
- Als $f : U \to V$ en $g : U \to W$ differentieerbaar zijn in het punt $x_0 \in U$ dan is de afbeelding $(f, g) : U \to V \times W$ differentieerbaar in x_0.
- een formule voor $D(f, g)(x_0)$
- Als een continue differentieerbare functie f op een C^1-deelvariëteit van $\mathbb{R}^n$ haar minimum in een punt x_0 aanneemt, dan is x_0 een kritiek punt van f.
- We definiëren

  $$U := \mathbb{R}^2 \setminus \big((-\infty, 0] \times \{0\}\big), \quad V := (0, \infty) \times (-\pi, \pi).$$

  De poolcoördinatenafbeelding is een glad diffeomorfisme tussen V en U.

Bewijs elke andere uitspraak die je doet. Rechtvaardig je berekeningen. Ga na dat aan de voorwaarden van de stellingen die je gebruikt is voldaan.

Succes!

Opgave 1 (eerste en tweede afgeleide, 5 pt)**.** Beschouw de functie

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x_1 x_2.$$

(i) Leg uit wat soort objecten de (totale) afgeleide Df en de tweede afgeleide $D(Df)$ zijn (zoals gedefinieerd in het hoorcollege en in het boek van Duistermaat en Kolk).

(ii) Bereken Df en $D(Df)$.

Opgave 2 (afgeleide van product van functies, 5 pt)**.** Zij $x_0 \in \mathbb{R}^2$ en $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ functies die in het punt x_0 differentieerbaar zijn. Bewijs dat de productfunctie $fg : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in x_0 differentieerbaar is en bereken haar afgeleide in dit punt.

Hint: Schrijf fg als de samenstelling van twee afbeeldingen.

Opgave 3 (deelvariëteit, raakruimte, minimum van functie, 17 pt)**.** We definiëren

$$M := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, e^x - 2x + e^y - 2y = 2\right\}.$$

(i) Laat zien dat M een gladde deelvariëteit van $\mathbb{R}^2$ is.

(ii) Bereken haar dimensie.

(iii) Bereken haar raakruimte in elk punt.

We definiëren de functie

$$f : M \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) := x + y.$$

(iv) Laat zien dat f haar minimum aanneemt.

(v) Bereken het minimum van f.

Opmerking: De deelopgaven zijn onafhankelijk van elkaar. Als je niet uitkomt met een deelopgave dan kan je de andere alsnog oplossen.

Opgave 4 (herhaalde integraal, 8 pt)**.** We definiëren

$$f : (0, 1) \times (0, 1) \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) := \sin\left(\frac{2\pi y}{x}\right).$$

Bewijs dat de volgende herhaalde integraal goed gedefinieerd is en bereken haar:

$$\int_0^1 \int_y^1 f(x, y)\, dx dy$$

Z.O.Z.

Opgave 5 (afgeleide van de inversie-afbeelding, 9 pt)**.** We rusten de ruimte van alle reële $n \times n$-matrices met een willekeurige norm uit. We duiden met $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ de verzameling van alle inverteerbare $n \times n$-matrices aan.

(i) Bewijs dat de volgende afbeelding glad is:

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \ni A \mapsto A^{-1} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$$

(ii) Bereken de afgeleide van de deze afbeelding.

Opmerking: In deze opgave mag je gladheid van een afbeelding die door een expliciete formule gegeven is **niet** gebruiken.

Hint: Gebruik (zonder bewijs) dat elke (bi-)lineaire afbeelding tussen eindigdimensionale vectorruimten glad is. Gebruik ook een stelling uit het hoorcollege.

Opgave 6 (integraal van een draai-invariante functie, 7 pt)**.** We definiëren

$$S := \overline{B}_2^2(0) \cap \big([0, \infty) \times \mathbb{R}\big) \setminus B_1^2(0).$$

(i) Teken de verzameling S.

(ii) Zij $\widetilde{f} : [1, 2] \to \mathbb{R}$ een continue functie. We definiëren

$$f : S \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \widetilde{f}(\|x\|).$$

Vind een formule voor $\int_S f(x)\, dx$ in termen van $\widetilde{f}$. Bewijs dat je formule klopt.

Opmerkingen: Dit is een variant van een gevolg in het hoorcollege. Je wordt gevraagd om deze variant opnieuw te bewijzen.
In deze opgave mag je zonder bewijs gebruiken dat een gegeven afbeelding Riemann-integreerbaar is als dit inderdaad het geval is.

Z.O.Z.

Opgave 7 (flux door oppervlak, 7 pt)**.** We definiëren

$$\Sigma := \left\{ \left(y, e^{(\|y\|^2)}\right) \,\middle|\, y \in \overline{B}_1^2(0) \right\}.$$

Dit is een gladde deelvariëteit van $\mathbb{R}^3$ met rand. (Dit hoef je **niet** te bewijzen.)

(i) Vind een eenheidsnormaalvectorveld ν op Σ.

(ii) We definiëren het vectorveld

$$X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad X(x) := \begin{pmatrix} x_1 \sin\left(e^{x_1+x_2}\right) \\ x_2 \sin\left(e^{x_1+x_2}\right) \\ \cos\left(e^{x_1-x_2}\right) \end{pmatrix}.$$

Bereken de flux

$$\int_\Sigma \begin{pmatrix} D_2X^3 - D_3X^2 \\ D_3X^1 - D_1X^3 \\ D_1X^2 - D_2X^1 \end{pmatrix} \cdot \nu \, dA.$$

Opmerkingen: Je mag zonder bewijs gebruiken dat een bepaalde afbeelding een globale gladde parametrisering van Σ is als dit inderdaad het geval is.
Je kan het tweede deel van de opgave oplossen zelfs als je het eerste deel niet kon oplossen.

Opgave 8 (divergentie van een vectorveld en flux, 8 pt)**.** Voor welke $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ is de volgende uitspraak waar? We definiëren $\nu : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ door $\nu(x) := x$. Zij X een C^1-vectorveld op $\overline{B}_1^n(0) \setminus \{0\}$ zó, dat $\nabla \cdot X$ Riemannintegreerbaar is. Dan geldt dat

$$\int_{\overline{B}_1^n(0)\setminus\{0\}} \nabla \cdot X \, dx = \int_{S^{n-1}} X \cdot \nu \, dA.$$