F. Ziltener 2021/ 2022, blok 4

# Analyse in meer variabelen, WISB212
## Hertentamen

achternaam: __________________ voornaam: __________________

studentnummer: ____________________________________

Het tentamen duurt 180 minuten.

**Aanwijzingen:**

- Zet je mobiele telefoon uit en leg hem in je tas.
- Leg je studentenkaart op tafel.
- Schrijf met een blauwe of zwarte pen, **niet** met een groene of rode pen, noch met een potlood.
- **Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.**
- **Lever ook dit voorblad in.**
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt oplossen, mag je dit onderdeel in het vervolg wel gebruiken.

26 punten zijn voldoende voor een cijfer 5.5.

**Voor verdere aanwijzingen z.o.z.**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| /3 | /10 | /6 | /9 | /5 | /5 | /10 | /4 | /9 | /61 |

Boeken, cursusmateriaal en rekenmachines mogen niet gebruikt worden, maar het is toegestaan om één vel papier (A4-formaat, voor- en achterkant) met eigen aantekeningen te gebruiken. Deze moeten handgeschreven zijn.

Tenzij anders aangegeven, mag je ieder resultaat ((hulp-)stelling, propositie of gevolg) gebruiken dat in het hoorcollege of in de cursusboeken is bewezen, zonder het opnieuw te bewijzen.

Tenzij anders aangegeven, mag je het volgende zonder bewijs gebruiken:

- Gladheid van een gegeven afbeelding als deze inderdaad glad is.
- De grafiek van een continue reëelwaardige functie op een compacte deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ is verwaarloosbaar.
- De bal $B_1^n(0)$ is een $C^\infty$-domein.
- Een afbeelding $\nu : \partial U \to \mathbb{R}^n$ is de naar buiten wijzende coöriëntatie op de rand van een $C^1$-domein $U \subseteq \mathbb{R}^n$, als dit inderdaad het geval is.

Bewijs elke andere uitspraak die je doet. Rechtvaardig je berekeningen. Ga na dat aan de voorwaarden van de stellingen die je gebruikt is voldaan.

Succes!

**Opgave 1** (samenstelling met een lineaire afbeelding, 3 pt)**.** Zij $m, n, p \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ en $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Stel dat $f$ in het punt $x_0$ differentieerbaar is en dat $T$ lineair is. Laat zien dat $T \circ f$ in $x_0$ differentieerbaar is en bereken de afgeleide $D(T \circ f)(x_0)$.

**Opmerking:** Als je gebruikt dat een lineaire afbeelding differentieerbaar is dan moet je dit bewijzen.

**Opgave 2** (sferische coördinaten, 10 pt)**.** We definiëren

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(r, \varphi, \theta) := r\big(\cos\varphi\cos\theta, \sin\varphi\cos\theta, \sin\theta\big).$$

(i) Teken de beelden onder $f$ van de vlakken $\{1\} \times \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R} \times \{\pi/2\} \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2 \times \{\pi/4\}$.

(ii) Bewijs dat elk punt in $(0, \infty) \times \mathbb{R} \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ een open omgeving $V$ heeft zó, dat de beperking $f : V \to f(V)$ een glad diffeomorfisme is.

**Opmerking:** Als je de determinant van een bepaalde matrix gebruikt dan moet je hem berekenen.

**Opgave 3** (submersie is open, 6 pt)**.** Zij $n, p \in \mathbb{N}$ en $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ een submersie. Laat zien dat $g$ open is, d.w.z. dat voor elke open deelverzameling $U$ van $\mathbb{R}^n$ de verzameling $g(U)$ open is.

**Hint:** Gebruik een resultaat uit het hoorcollege.

**Opgave 4** (raakruimten aan logaritmische spiraal, 9 pt)**.** (i) Teken een plaatje van de logaritmische spiraal

$$M := \left\{ e^y\big(\cos y, \sin y\big) \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

(ii) Bewijs dat dit een gladde deelvariéteit van $\mathbb{R}^2$ is. Bereken haar dimensie.

(iii) Bereken de raakruimte van $M$ in elk punt.

(iv) Bepaal $T_{(1,0)}M$.

**Opgave 5** (Lagrange-multiplicator-methode, 5 pt)**.** Zij

$$n, p \in \mathbb{N}, \quad U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ open, } F \in C^1(U, \mathbb{R}), \quad g \in C^1(U, \mathbb{R}^p),$$
$$M := g^{-1}(0), \quad f := F|_M, \quad x_0 \in M,$$
$$L : U \times \mathrm{Lin}\left(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}\right) \to \mathbb{R}, \quad L(x, \lambda) := F(x) - \lambda g(x).$$

Stel dat $g$ een submersie is en dat er een $\lambda \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ bestaat zó, dat $(x_0, \lambda)$ een kritiek punt van $L$ is. Laat zien dat $x_0$ een kritiek punt van $f$ is.

**Opgave 6** (Riemann-integraal, 5 pt)**.** Laat zien dat de functie

$$f : R := [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1, & \text{if } x_1 \geq x_2, \\ 0, & \text{anders,} \end{cases}$$

(eigenlijk) Riemann-integreerbaar is en bereken haar integraal.

**Opmerking:** In deze opgave mag je alleen de definitie van integreerbaarheid en van de integraal gebruiken. Gebruik geen resultaten uit het hoorcollege of het boek.

Z.O.Z.

**Opgave 7** (volume van simplex, 10 pt). (i) Teken de verzameling

$$\Delta_n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \dots, x_n \geq 0,\, x_1 + \cdots + x_n \leq 1\}$$

voor $n = 1, 2, 3$.

(ii) Zij $n \in \mathbb{N}$. Bewijs dat $\Delta_n$ Jordan-meetbaar is.

(iii) Bereken de Jordan-maat van $\Delta_n$.

**Opmerking:** Je mag het feit gebruiken dat voor elke Jordan-meetbare deelverzameling $S$ van $\mathbb{R}^m$ en elke $c \geq 0$ de verzameling

$$cS = \{cx \mid x \in \mathbb{R}^m\}$$

Jordan-meetbaar is met Jordan-maat

$$|cS| = c^m |S|.$$

**Opgave 8** (integraal over bal, 4 pt). We definiëren

$$f : \overline{B}^2_1(0) \to \mathbb{R}, \quad f(x) := D_1\big(-x_2 e^{x_1 x_2}\big) + D_2\big(x_1 e^{x_1 x_2}\big).$$

Bereken de Riemann-integraal van $f$.

**Opmerking:** Je hoeft niet te bewijzen dat $f$ Riemann-integreerbaar is.

**Opgave 9** (verwisselen van de integratievolgorde, 9 pt). Vind een functie $f : (0,1) \times (0,1) \to \mathbb{R}$ zó, dat het volgende geldt:

- De functies $f(\cdot, y), f(x, \cdot) : (0,1) \to \mathbb{R}$ zijn Riemann-integreerbaar voor alle $x, y \in (0,1)$.
- De functie $(0,1) \ni y \mapsto \int_0^1 f(x,y)\,dx \in \mathbb{R}$ is Riemann-integreerbaar met integraal

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 f(x,y)\,dx \right) dy = 0.$$

- Voor elke $a \in (0,1)$ is de functie $(a,1) \ni x \mapsto \int_0^1 f(x,y)\,dy$ Riemann-integreerbaar en

$$\int_a^1 \left( \int_0^1 f(x,y)\,dy \right) dx \to \infty, \quad \text{as } a \to 0. \tag{1}$$

**Opmerking:** De convergentie (1) betekent dat er voor elke $C \in \mathbb{R}$ een $a_0 \in (0,1)$ bestaat zó, dat $\int_a^1 \ldots \geq C$ voor elke $a \in (0, a_0]$.

**Hint:** Het kan helpen om de verzameling $(0,1) \times (0,1)$ in delen op te splitsen en $f$ op elk deel apart te definiëren.