Tentamen Functies en Reeksen, WISB211 — 31 januari 2022, 13:30 – 16:30

Uitwerking 1

(a) Voor $k \geq 1$ en $x \in [-R, R]$ geldt

$$|f_k(x)| \leq \frac{x^2}{x^2 + k^2} \leq \frac{R^2}{k^2}.$$

De reeks $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ convergeert, dus met het uniforme majorarantie kenmerk volgt dat de reeks $\sum_{k\geq 1} f_k$ absoluut uniform convergeert op $[-R, R]$.

(b) Zij $k \geq 1$. Nemen we $x_l = 2\pi\ell$, met $\ell \in \mathbb{N}$ dan vinden we

$$|f_k(x_\ell)| = \frac{x_\ell^2}{x_\ell^2 + k^2} = \frac{1}{1 + k^2/(2\pi\ell)^2} \to 1$$

voor $\ell \to \infty$. Omdat $|f_k(x_\ell)| \leq \|f_k\|_{\mathbb{R}}$ volgt door de limiet voor $\ell \to \infty$ te nemen dat $1 \leq \|f_k\|_{\mathbb{R}}$.

(c) Uit de uniforme convergentie van de reeks op $\mathbb{R}$ zou volgen dat $\lim_{k\to\infty} \|f_k\| = 0$. Wegens (b) geldt dit laatste niet, dus de convergentie is niet uniform.

(d) Zij $a \in \mathbb{R}$. Kies $R > |a|$, dan is $a \in\,]-R, R[$. Uit (a) en de continuïteit van de functies f_k op $\mathbb{R}$ volgt dat $F|_{[-R,R]}$ continu is. Hieruit volgt de continuïteit van F in a. Omdat dit geldt voor iedere $a \in \mathbb{R}$ concluderen we dat F continu is op $\mathbb{R}$.

Uitwerking 2

(a) Voor $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ geldt dat $e^z - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$. Delen door z levert dan

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{-1} z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!}.$$

De gestelde gelijkheid geldt dus met $c_k = \frac{1}{(k+1)!}$. De machtreeks is tevens de Laurentreeksontwikkeling van φ op $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ en is daarom uniek bepaald door de functie φ.

(b) Het convergentiegebied van de machtreeks is de gehele $\mathbb{C}$. De machtreeks definieert een uitbreiding f van φ die complex differentieerbaar is. De uitbreiding voldoet aan $f(0) = c_0 = 1/1! = 1 \neq 0$.

(c) $z = 0$ is geen nulpunt. Zij $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Uit $f(z) = 0$ volgt dan $e^z - 1 = 0$, hetgeen gelijkwaardig is met $z \in 2\pi i\mathbb{Z}$. We concluderen dat $N \subset 2\pi i\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. De omgekeerde inclusie is evident, dus $N = 2\pi i\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. In het bijzonder geldt $D(0; 2\pi) \cap N = \emptyset$.

(d) De functie f is complex differentieerbaar op $D := D(0; 2\pi)$ en heeft daar geen nulpunten wegens (c). Met de quotiëntregel volgt nu dat $g = 1/f$ (continu) complex differentieerbaar is op D, met complexe afgeleide $-f'/f^2$. Met een stelling volgt hieruit dat g op de schijf D een unieke convergente machtreeksontwikkeling heeft van de vorm $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k$. Er geldt dat $d_0 = g(0) = 1/f(0) = 1$. Voorts geldt dat

$$d_1 = g'(0) = -f(0)^{-2} f'(0) = -c_1 = -1/2! = -1/2.$$

(e) Uit de convergentie van de machtreeks op $D(0; 2\pi)$ volgt dat de convergentiestraal ρ van de machtreeks minstens gelijk is aan 2π. We zullen laten zien dat $\rho = 2\pi$. Stel dat dit niet het geval zou zijn, dan $\rho > 2\pi$. Hieruit zou volgen dat de machtreeks een complex differentieerbare functie h op $D(0; \rho)$ definieert. Anderzijds is $h = g$ op D. Er geldt dus $h(z)/z = g(z)/z$ op $D \setminus \{0\}$. Hieruit volgt:

$$(2\pi i)^{-1} h(2\pi i) = \lim_{z \in D, z \to 2\pi i} g(z)/z,$$

dus ook

$$h(2\pi i)/2\pi i = \lim_{y \uparrow 2\pi} g(iy)/iy = \lim_{y \uparrow 2\pi} \frac{1}{e^{iy} - 1}$$

hetgeen onmogelijk is omdat $\lim_{y \uparrow 2\pi} e^{iy} = 1$. We concluderen dat $\rho = 2\pi$.

Uitwerking 3

(a) Er geldt dat α een enkelvoudig nulpunt van p is, waaruit volgt dat

$$\lim_{z \to \alpha} \frac{p(z)}{z - \alpha} = \lim_{z \to \alpha} \frac{p(z) - p(\alpha)}{z - \alpha} = p'(\alpha) \neq 0.$$

Met de quotiëntregel voor limieten volgt nu $\lim_{z \to \alpha} (z - \alpha)/p(z) = 1/p'(\alpha)$.

Uit het bovenstaande volgt, met de productregel voor limieten, dat

$$(z - \alpha) f(z) = z^2 \, \frac{z - \alpha}{p(z)} \to \frac{\alpha^2}{p'(\alpha)} = \frac{\alpha^2}{4\alpha^3}$$

voor $z \to \alpha$. Hieruit volgt de gewenste formule.

(b) Voor z in het beeld van τ_R geldt dat $|z| = R$, dus

$$|f(z)| = \frac{|z|^2}{|z^4 + 1|} \leq \frac{R^2}{R^4 - 1}.$$

Aangezien de lengte van τ_R gelijk is aan πR, volgt met de de standaardschatting voor integralen dat

$$\left| \int_{\tau_R} f(z)\, dz \right| \leq \frac{\pi R^3}{R^4 - 1} = R^{-1} \frac{\pi}{1 - R^{-4}}.$$

De laatste uitdrukking heeft limiet nul voor $R \to \infty$. Met de insluitstelling volgt daarom het gewenste resultaat.

(c) Van de singuliere punten liggen $\alpha_1 := (1 + i)/\sqrt{2}$ en $\alpha_2 := -\bar{\alpha}_1$ in het boven halfvlak. De andere singuliere punten, $\bar{\alpha}_1$ en $\bar{\alpha}_2$ liggen in het onder halfvlak. Zij $k_R : t \mapsto t, [-R, R] \to \mathbb{C}$ een parametrisering van het lijnstuk van $-R$ naar R. Zij γ_R een gesloten stuksgewijze C^1-kromme die uit k_R en τ_R ontstaat door herparametriseren en plakken. Dan windt γ_R

één keer in positieve zin rond elk van de punten α_1, α_2, terwijl γ_R samentrekbaar is in het boven halfvlak, dus in $\mathbb{C} \setminus \{\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2\}$. Hieruit volgt met de residuenstelling dat

$$\int_{\gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi i \,(\mathrm{Res}_{\alpha_1} f + \mathrm{Res}_{\alpha_2} f) = \frac{\pi i}{2}(\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2) = \pi/\sqrt{2}.$$

We concluderen dat voor iedere $R > 1$ geldt

$$\int_{-R}^{R} f(x)\, dx = \int_{k_R} f(z)\, dz = \pi/\sqrt{2} - \int_{\tau_R} f(z)\, dz.$$

Door de limiet te nemen voor $R \to \infty$ en (b) toe te passen vinden we dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\, dx = \pi/\sqrt{2}.$$

Uitwerking 4

(a) Er geldt:

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iax-ikx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{i(a-k)x}}{i(a-k)}\right|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{(-1)^k}{2\pi}\frac{(e^{ia\pi} - e^{-ia\pi})}{i(a-k)} = \frac{(-1)^k}{\pi}\frac{\sin(a\pi)}{(a-k)}.$$

(b) De functie f is stuksgewijs C^1 dus Riemann integreerbaar over $[-\pi, \pi]$ en de Fourierreeks voldoet derhalve aan de identiteit van Parseval:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx = 1.$$

Vullen we de in (a) gegeven formule voor c_k in, dan vinden we

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(\sin \pi a)^2}{\pi^2}\frac{1}{(a-k)^2} = 1.$$

Door beide leden met $\pi^2/(\sin \pi a)^2$ te vermenigvuldigen vinden we de gewenste identiteit.

(c) Aangezien $f \in C^{1,st}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ geldt wegens een stelling dat de rij $s(f)_n(\pi)$ puntsgewijs convergeert met limiet

$$\lim_{n\to\infty} s(f)_n(\pi) = \frac{1}{2}(f(\pi+) + f(\pi-)).$$

Het is evident dat $f(\pi-) = e^{ia\pi}$. Wegens de 2π-periodiciteit van f is $f(\pi^+) = f(-\pi+) = e^{-ia\pi}$. Als limietwaarde vinden we dus

$$\lim_{n\to\infty} s(f)_n(\pi) = \frac{e^{ia\pi} + e^{-ia\pi}}{2} = \cos a\pi.$$