Tentamen Functies en Reeksen, WISB211 31 januari 2022, 13:30 – 16:30

- **Maak iedere opgave op een apart vel.** Schrijf op ieder vel **je voor- en achternaam** en bovendien op het eerste vel je **studentnummer** en het **aantal ingeleverde vellen**.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Dit is een open boek tentamen, diktaat en aantekeningen mogen worden gebruikt.
- De normering per onderdeel en voor de opgave als geheel staan vermeld. Het totaal aantal te behalen punten is 40. Het tentamencijfer wordt bepaald door het totaal aantal punten gedeeld door 4, uitgerekend in 1 decimaal nauwkeurig.

Succes !

10 pt tot **Opgave 1** We beschouwen de functies $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, voor $k \geq 1$, gedefinieerd door

$$f_k(x) = \frac{x^2 \cos kx}{x^2 + k^2}, \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

3 pt (a) Toon aan dat de reeks $\sum_{k \geq 1} f_k$ absoluut uniform convergeert op ieder interval $[-R, R]$, met $R > 0$.

3 pt (b) Toon aan dat $\|f_k\|_{\mathbb{R}} \geq 1$ voor alle $k \geq 1$. (Hierin is $\|\cdot\|_{\mathbb{R}}$ de sup-norm van f over $\mathbb{R}$.)

1 pt (c) Toon aan dat de reeks $\sum_{k \geq 1} f_k$ niet uniform convergeert op $\mathbb{R}$.

3 pt (d) Toon aan dat door

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

een continue functie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wordt gedefinieerd.

10 pt tot **Opgave 2** We beschouwen de functie $\varphi : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door

$$\varphi(z) = \frac{e^z - 1}{z}.$$

1 pt (a) Bepaal coëfficiënten $c_k \in \mathbb{C}$, voor $k \geq 0$ zo dat

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

Beargumenteer dat deze coëfficiënten uniek bepaald zijn.

2 pt (b) Toon aan dat φ uitbreidbaar is tot een complex differentieerbare functie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Toon aan dat $f(0) \neq 0$.

ZOZ

2 pt (c) Bepaal de verzameling $N = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = 0\}$ van alle nulpunten van f. Toon aan dat $D(0; 2\pi) \cap N = \emptyset$.

3 pt (d) We definiëren $g : \mathbb{C} \setminus N \to \mathbb{C}$ door $g(z) := 1/f(z)$. Beargumenteer dat g op $D(0; 2\pi)$ gegeven wordt door een uniek bepaalde machtreeks. Bepaal de eerste twee termen van die machtreeks.

2 pt (e) Bepaal de convergentiestraal van de in (d) genoemde machtreeks, en bewijs de juistheid van je bewering.

10 pt tot **Opgave 3** We beschouwen de complexe functie f gegeven door de formule

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4 + 1}.$$

Je mag in deze opgave het gemakkelijk te bewijzen feit gebruiken dat f vier singuliere punten heeft, die alle van eerste orde zijn, namelijk $(\pm 1 \pm i)/\sqrt{2}$.

3 pt (a) Toon aan dat in elk singulier punt α van f geldt dat $\mathrm{Res}_\alpha f = 1/(4\alpha)$. Hint: schrijf $p(z) = z^4 + 1$ en toon eerst aan dat

$$\lim_{z \to \alpha} \frac{z - \alpha}{p(z)} = \frac{1}{p'(\alpha)}.$$

3 pt (b) Voor $R > 1$ definiëren we $\tau_R : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ door $\tau_R(t) = Re^{it}$. Toon aan dat

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\tau_R} f(z)\, dz = 0.$$

4 pt (c) Bereken de integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1}\, dx.$$

door gebruik te maken van (a), (b) en de residuenstelling.

10 pt tot **Opgave 4** In deze opgave is a een niet geheel reëel getal, dus $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. We beschouwen de 2π-periodieke functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die op $]-\pi, \pi]$ gedefinieerd is door $f(x) = e^{iax}$.

3 pt (a) Toon aan dat de Fourier-coëfficiënten $c_k = \mathcal{F}(f)_k$ voor $k \in \mathbb{Z}$ gegeven worden door

$$c_k = \frac{(-1)^k \sin(\pi a)}{\pi(a - k)}.$$

4 pt (b) Bewijs dat

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(a - k)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin \pi a)^2}.$$

3 pt (c) We noteren de symmetrische partiële Fourier som met $s(f)_n(x) := \sum_{|k| \le n} c_k e^{ikx}$. Beargumenteer dat de rij $s(f)_n(\pi)$ convergeert voor $n \to \infty$, en bepaal de limiet.