Herkansing Functies en Reeksen, WISB211 19 April 2022, 13:30 – 16:30

Uitwerking 1

(a) Zij $k \geq R$. Dan geldt voor $x \geq -R$ dat $x + 2k \geq -R + R + k = k$, dus $(x + 2k)^2 \geq k^2$ dus

$$|f_k(x)| \leq e^{-k^2}.$$

Uit deze uniforme schatting volgt dat

$$\|f_k\|_{[-R,\infty[} \leq e^{-k^2}.$$

(b) De reeks $\sum_{k\geq 1} e^{-k}$ is een meetkundige reeks met reden $0 < e^{-1} < 1$, dus convergent. Voor $k \geq 1$ geldt dat $e^{-k^2} \leq e^{-k}$, dus met (a) en het majorantiekenmerk volgt dat de reeks

$$\sum_{k\geq 0} \|f_k\|_{-[R,\infty[}$$

convergent is. Dit betekent per definitie dat de reeks absoluut uniform convergeert op het interval $[-R, \infty[$.

(c) Er geldt dat $f_k(-2k) = 1$, dus $\|f_k\|_{\mathbb{R}} \geq 1$. Uit de uniforme convergentie van $\sum_{k\geq 1} f_k$ op $\mathbb{R}$ zou volgen dat $\|f_k\|_{\mathbb{R}} \to 0$ voor $k \to \infty$. Dit leidt tot een tegenspraak.

(d) Zij $a \in \mathbb{R}$ willekeurig. Kies $R < a$. Dan is $a \in]-R, \infty[$. Uit de uniforme convergentie van de reeks op $[-R, \infty[$ volgt de continuïteit van de funcite F beperkt tot $[-R, \infty[$. Hieruit volgt dat F continu is in alle punten van $]-R, \infty[$, dus in a. Hieruit volgt de continuïteit van F in alle punten van $\mathbb{R}$, dus F is continu.

Uitwerking 2

(a) Noem de coëfficiënt van de machtreeks c_k. Dan is

$$\frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} = \frac{((k+1)!)^2(2k)!}{(k!)^2(2k+2)!} = \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{(1+k^{-1})^2}{(2+k^{-1})(2+2k^{-1})}.$$

De laatste uitdrukking heeft limiet $1/4$ voor $k \to \infty$. De convergentiestraal van de machtreeks is daarom wegens een stelling gelijk aan $(1/4)^{-1} = 4$.

(b) We noemen $c_k := (1 + k^{-1})^k$. Er geldt dat $\sqrt[k]{|c_k|} = 1 + k^{-1} \to 1 \ \ (k \to \infty)$. Dus

$$\limsup_{k\to\infty} |c_k|^{1/k} = 1.$$

Hieruit volgt dat de convergentiestraal van de reeks gelijk is aan $1/1 = 1$. De reeks convergeert dus voor alle $z \in \mathbb{C}$ met $|z-2i| < 1$ en divergeert voor alle $z \in \mathbb{C}$ met $|z-2i| > 1$. Voor z op de convergentiecirkel geldt $|z - 2i| = 1$, dus

$$|c_k(z-2i)^k| = |c_k| = |1 + k^{-1}|^k \geq 1$$

waaruit blijkt dat de uitdrukking in het eerste lid niet naar nul convergeert voor $k \to \infty$. Voor z op de genoemde convergentiecirkel divergeert de reeks dus.

(c) De functie $f(z) = e^z + 1$ is holomorf. Zij N de collectie van $z \in \mathbb{C}$ met $f(z) = 0$. Een element $z \in \mathbb{C}$ behoort tot N dan en slechts dan als $e^z = -1$ hetgeen gelijkwaardig is met $e^{z-i\pi} = 1$, dus met $z - \pi i \in 2\mathbb{Z}\pi i$. We concluderen dat

$$N = (2\mathbb{Z} + 1)\pi i.$$

Uitwerking 3

(a) Er geldt dat α een enkelvoudig nulpunt van p is, waaruit volgt dat

$$\lim_{z\to\alpha} \frac{p(z)}{z-\alpha} = \lim_{z\to\alpha} \frac{p(z)-p(\alpha)}{z-\alpha} = p'(\alpha) \neq 0.$$

Met de quotiëntregel voor limieten volgt nu $\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)/p(z) = 1/p'(\alpha)$.

Uit het bovenstaande volgt dat

$$(z-\alpha)f(z) = \frac{z-\alpha}{p(z)} \to \frac{1}{p'(\alpha)} = \frac{1}{3\alpha^2} = -\frac{\alpha}{3}$$

voor $z \to \alpha$. Hieruit volgt de gewenste formule.

(b) Voor z in het beeld van τ_R geldt dat $|z| = R$, dus

$$|f(z)| = \frac{1}{|z^3+1|} \leq \frac{1}{R^3-1}.$$

Aangezien de lengte van τ_R gelijk is aan $2\pi R/3$, volgt met de de standaardschatting voor integralen dat

$$\left|\int_{\tau_R} f(z)\,dz\right| \leq \frac{2\pi R/3}{R^3-1} = \frac{2\pi R^{-2}/3}{1-R^{-3}}.$$

De laatste uitdrukking heeft limiet nul voor $R \to \infty$. Met de insluitstelling volgt daarom het gewenste resultaat.

(c) Door invullen van de parametrisering volgt, aangezien $(\alpha^2)^3 = 1$, dat

$$\int_{k_R} f(z)\,dz = \int_0^R f(\alpha^2 t)\alpha^2\,dt = \alpha^2 \int_0^R f(t)\,dt = \alpha^2 \int_{\gamma_R} f(z)\,dz,$$

waaruit de gestelde identiteit volgt.

(d) De gesloten stuksgewijze C^1-kromme G_R die ontstaat door herparametriseren en aan elkaar plakken van γ_R, τ_R en de omkering van k_R is samentrekbaar in $\mathbb{C} \setminus \{-1, \bar{\alpha}\}$ en windt één keer in positieve zin rond α. Met de residuenstelling volgt nu dat (voor elke $R > 1$)

$$\int_{G_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_\alpha f = -2\pi i\alpha/3.$$

Door opsplitsen en gebruik te maken van (c) vinden we

$$(1-\alpha^2)\int_{\gamma_R} f(z)\,dz + \int_{\tau_R} f(z)\,dz = -2\pi i\alpha/3.$$

Door de limiet te nemen voor $R \to \infty$ en gebruik te maken van (b) vinden we

$$(1-\alpha^2)I = -2\pi i\alpha/3,$$

waarin

$$I = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\ dz = \int_0^\infty \frac{1}{x^3+1}\ dx.$$

Door links en rechts te delen door $-2i\alpha$ vinden we

$$\frac{1}{2i}(\alpha - \alpha^{-1})I = \pi/3.$$

De factor voor I is gelijk aan $\sin(\pi/3)$, dus het gestelde volgt.

Uitwerking 4

(a) Er geldt:

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\ e^{-ikx}\ dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ax-ikx}\ dx = \frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{(a-ik)x}}{(a-ik)}\right|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{(e^{2a\pi}-1)}{(a-ik)}.$$

(b) De functie f is stuksgewijs C^1 dus Riemann integreerbaar over $[0, 2\pi]$ en de Fourierreeks voldoet derhalve aan de identiteit van Parseval:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\ dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2ax}\ dx = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{4a\pi}-1}{2a}.$$

Vullen we de in (a) gegeven formule voor c_k in, dan vinden we

$$\frac{(e^{2a\pi}-1)^2}{4\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{a^2+k^2} = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{4a\pi}-1}{2a}.$$

Door beide leden met $4\pi a(e^{2a\pi}-1)^{-2}$ te vermenigvuldigen vinden we de gewenste identiteit.

(c) Aangezien $f \in C^{1,st}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ geldt wegens een stelling dat de rij $s(f)_n(0)$ puntsgewijs convergeert met limiet

$$\lim_{n\to\infty} s(f)_n(0) = \frac{1}{2}(f(0+) + f(0-)).$$

Het is evident dat $f(0+) = 1$. Wegens de 2π-periodiciteit van f is $f(0-) = f(2\pi-) = e^{2a\pi}$. Als limietwaarde vinden we dus

$$\lim_{n\to\infty} s(f)_n(0) = \frac{e^{2a\pi}+1}{2}.$$