Herkansing Functies en Reeksen, WISB211 19 April 2022, 13:30 – 16:30

- **Maak iedere opgave op een apart vel.** Schrijf op ieder vel **je voor- en achternaam** en bovendien op het eerste vel je **studentnummer** en het **aantal ingeleverde vellen**.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Dit is een open boek tentamen, diktaat en aantekeningen mogen worden gebruikt.
- De normering per onderdeel en voor de opgave als geheel staan vermeld. Het totaal aantal te behalen punten is 42. Het tentamencijfer T wordt uit het totaal aantal punten P bepaald met de formule $T = \min(10, P/4)$, afgerond op een geheel getal als $T < 6$ en op een half geheel getal als $T \geq 6$.

Succes !

10 pt tot **Opgave 1** We beschouwen de functies $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, voor $k \geq 1$, gedefinieerd door

$$f_k(x) = e^{-(x+2k)^2}, \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

3 pt (a) Zij $R > 0$. Toon aan dat voor $k \geq R$ de supnorm van f_k over $[-R, \infty[$ voldoet aan

$$\|f_k\|_{[-R,\infty[} \leq e^{-k^2}.$$

3 pt (b) Toon aan dat de reeks $\sum_{k\geq 1} f_k$ absoluut uniform convergeert op $[-R, \infty[$.

1 pt (c) Toon aan dat de reeks $\sum_{k\geq 1} f_k$ niet uniform convergeert op $\mathbb{R}$.

3 pt (d) Toon aan dat door $F(x) = \sum_{k\geq 1} e^{-(x+2k)^2}$ een continue functie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wordt gedefinieerd.

10 pt tot **Opgave 2**

3 pt (a) Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks $\sum_{k\geq 1} \frac{(k!)^2}{(2k)!} z^k$.

4 pt (b) Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks $\sum_{k\geq 1} (1 + k^{-1})^k (z - 2i)^k$. Toon aan dat de machtreeks divergeert in alle punten van zijn convergentiecirkel. Bepaal de verzameling van alle $z \in \mathbb{C}$ waarvoor de machtreeks convergeert.

3 pt (c) Toon aan dat er unieke coëfficiënten $c_k \in \mathbb{C}$, voor $k \geq 0$, bestaan, zo dat

$$\frac{1}{e^z + 1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \qquad (|z| < \pi).$$

Toon aan dat de convergentiestraal van de machtreeks in het rechterlid gelijk is aan π.

ZOZ

12 pt tot **Opgave 3** We beschouwen de complexe functie f gegeven door de formule $f(z) = (z^3 + 1)^{-1}$. Je mag in deze opgave het gemakkelijk te bewijzen feit gebruiken dat f drie polen van eerste orde heeft namelijk -1, $\alpha = e^{\pi i/3}$ en $\bar{\alpha} = e^{-\pi i/3}$.

2 pt (a) Toon aan dat $\mathrm{Res}_\alpha f = -\alpha/3$. Hint: schrijf $p(z) = z^3 + 1$ en toon eerst aan dat

$$\lim_{z \to \alpha} \frac{z - \alpha}{p(z)} = \frac{1}{p'(\alpha)}.$$

3 pt (b) Voor $R > 1$ definiëren we de kromme $\tau_R : [0, \pi/3] \to \mathbb{C}$ door $\tau_R(t) = Re^{2it}$. Toon aan dat

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\tau_R} f(z)\, dz = 0.$$

3 pt (c) Voor $R > 1$ definiëren we de krommen $\gamma_R : [0, R] \to \mathbb{C}, t \mapsto t$ en $\kappa_R : [0, R] \to \mathbb{C}, t \mapsto t\alpha^2$. Bewijs dat

$$\int_{\kappa_R} f(z)\, dz = \alpha^2 \int_{\gamma_R} f(z)\, dz.$$

4 pt (d) Pas de residuenstelling toe op de integraal van f langs de gesloten stuksgewijze C^1 kromme die door herparametriseren en plakken ontstaat uit γ_R, τ_R en de omkering van κ_R, en toon aan dat

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^3 + 1}\, dx = \frac{\pi}{3 \sin(\pi/3)}.$$

10 pt tot **Opgave 4** In deze opgave is a een reëel getal ongelijk nul, dus $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. We beschouwen de 2π-periodieke functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die op $[0, 2\pi[$ gedefinieerd is door $f(x) = e^{ax}$.

3 pt (a) Toon aan dat de Fourier-coëfficiënten $c_k = \mathcal{F}(f)_k$ voor $k \in \mathbb{Z}$ gegeven worden door

$$c_k = \frac{e^{2a\pi} - 1}{2\pi(a - ik)}.$$

4 pt (b) Bewijs dat

$$\frac{a}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a^2 + k^2} = \frac{e^{2a\pi} + 1}{e^{2a\pi} - 1}.$$

3 pt (c) We noteren de symmetrische partiële Fourier som met $s(f)_n(x) := \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikx}$. Beargumenteer dat de rij $s(f)_n(0)$ convergeert voor $n \to \infty$, en bepaal de limiet.