Inleiding Kansrekening en Statistiek (WISB 161)
Tentamen

Sjoerd Dirksen

3 februari 2022, 13:30-16:30

Dit tentamen bestaat uit 5 vragen, die in totaal 45 punten waard zijn. Schrijf op elk ingeleverd blad jouw naam en studentnummer en nummer de pagina's. Voorzie elk antwoord van een zorgvuldige motivatie. Vereenvoudig jouw antwoorden voor zover mogelijk.

Vraag 1 [8 punten]

Zij X exponentieel verdeeld met parameter $\lambda > 0$. Laat zien dat $Y = e^{3X}$ Pareto verdeeld is en bepaal de parameter van de verdeling.

Vraag 2 [8 punten]

Joop en Angelique hebben ruzie in hun studentenhuis. Joop heeft net gelezen dat de meerderheid van de coronapatiënten in het ziekenhuis gevaccineerd is. Hij gelooft dat Bill Gates vaccins gebruikt om stiekem een Windows© besturingssysteem in het brein te installeren. De vele bugs in het systeem zouden het immuunsysteem ondermijnen en ervoor zorgen dat gevaccineerden juist vatbaarder worden voor het virus. Angelique vindt Joop een wappie.

Huisgenoot Jasmijn heeft genoeg van het geruzie. Om de kwestie op te helderen gebruikt ze haar kennis van *Inleiding Kansrekening en Statistiek* om te berekenen bij welke vaccinatiegraad van de bevolking het waarschijnlijker is dat een willekeurige coronapatiënt in het ziekenhuis gevaccineerd is. In een publicatie van het RIVM vindt zij dat de kans op ziekenhuisopname voor een gevaccineerd persoon 17 keer kleiner is dan voor een ongevaccineerd persoon. Welke vaccinatiegraad vindt zij?

Vraag 3 [9 punten]

John en Nicolas zijn naar Engeland gekomen om een potje tennis op heilig gras te spelen. De partij gaat zeer gelijk op en John en Nicolas spelen aan het eind een beslissende vijfde set. De setstand is 6-6, d.w.z., ze hebben beide 6 games gewonnen. John en Nicolas spelen vanaf nu om de beurt een servicegame en stoppen met spelen zodra één van hen twee games voor staat. We nemen aan dat de serverende speler een kans van $\frac{3}{4}$ heeft om zijn servicegame te winnen en dat de resultaten van de verschillende games elkaar niet beïnvloeden. Laat zien dat de kans dat John en Nicolas de tussenstand 68-68 bereiken gelijk is aan $\frac{5^{62}}{2^{186}}$.

Opmerking: John Isner en Nicolas Mahut speelden de langste tennispartij ooit. Deze vond plaats op Wimbledon in 2010. De laatste set werd met 70-68 gewonnen door Isner.

Vraag 4 [11 punten]

Zij X een Poisson verdeelde kansvariabele met parameter $\lambda > 0$. We zijn geïnteresseerd in het schatten van de parameter $\theta = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$. Zij $X_1, \ldots, X_n$ een onafhankelijke steekproef uit de verdeling van X en zij $\bar{X}_n$ het steekproefgemiddelde.

(a) Laat zien dat $G_n = \sqrt{\bar{X}_n}$ een consistente schatter van θ is.

(b) Laat zien dat $G_n = \sqrt{\bar{X_n}}$ géén zuivere schatter van θ is.

Vraag 5 [9 punten]

Zij X een continue kansvariabele waarvan bekend is dat zijn kansdichtheid wordt gegeven door

$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x-\theta^*|}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

waarbij $\theta^* \in \mathbb{R}$ een onbekende parameter is. Zij

$$22, -10, 0, 3, 1, 16, 11, 12, -3$$

een realisatie van een onafhankelijke steekproef uit de verdeling van X. Bepaal een meest aannemelijke schatting van θ^*.

Een aantal belangrijke kansverdelingen

Discrete kansverdelingen

Naam	Kansfunctie	Verwachtingswaarde	Variantie
Ber(p)	$\mathbb{P}(X=1) = p = 1 - \mathbb{P}(X=0)$	p	$p(1-p)$
Binom(n,p)	$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\ \ k = 0, \ldots, n$	np	$np(1-p)$
Geom(p)	$\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1},\ \ k \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Pois(λ)	$\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ \ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$	λ	λ

Continue verdelingen

Naam	Kansdichtheid	Verwachtingswaarde	Variantie
Unif(a,b)	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{als } a < x < b \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exp(λ)	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{als } x > 0 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
N(μ, σ^2)	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2
Par(α)	$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} & x \geq 1, \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$	∞ als $\alpha \leq 1$, $\frac{\alpha}{\alpha-1}$ als $\alpha > 1$	∞ als $\alpha \leq 2$, $\frac{\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$ als $\alpha > 2$